Z变换与差分方程

王泽汉
龙文庭 编

哈尔滨工业大学出版社

Z变换与差分方程

王泽汉　龙文庭　编

哈尔滨工业大学出版社

Z变换与差分方程

王泽汉　龙文庭 编

•

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨船舶工程学院印刷厂印刷

•

开本 787×1092　1/32　印张 5.625　字数 121,000

1985年1月第1版　1985年1月第1次印刷

印数1—10,000

书号 13341·5　定价 1.40元

前　言

用Z变换解差分方程，实质上就是将差分方程转化为代数方程来解。它同拉普拉斯变换解微分方程一样，是一种有效的方法。在自动控制理论中，是处理线性定常离散系统的一个重要方法。

本书对Z变换的概念、理论与方法，作了较系统而全面的介绍。汇集、推算了较完整的Z变换表。最后，并给出了关于差分方程的算子解法。

本书可供有关专业的教师、科技人员、工程技术人员、自学者学习参考之用。由于编者的水平与经验所限，不当之处，在所难免。请读者勿吝批评指正。

本书经杨克劭同志校阅，并提出宝贵意见，在此致谢。

编　者

1984.10

目 录

§1　差分方程概念

如同微分方程用来表明模拟信号的系统那样，差分方程则用来表明离散信号的系统。由于差分方程容易在数字计算机上处理，并且比较容易解出，所以差分方程可用来逼近微分方程。

作为数字逼近的一个例子，我们可用一个向前差来逼近一个函数在一个已知点的导数，即

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=kT} \approx \frac{y(kT+T)-y(kT)}{T} \tag{1.1}$$

其中T（$T>0$）选为某一个很小的值使(1.1)是一个足够近似的等式。用(1.1)，我们可将一阶微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=f(t) \tag{1.2}$$

在$t=kT$时用

$$\frac{y(kT+T)-y(kT)}{T}+ay(kT)=f(kT) \tag{1.3}$$

来逼近。方程(1.3)可写成

$$\frac{1}{T}y(kT+T)+\left(a-\frac{1}{T}\right)y(kT)=f(kT) \tag{1.4}$$

此为一阶差分方程，其中$k=0，1，2，3，\cdots$。

一般，一个 n 阶常系数线性差分方程为

$$a_0 y(kT+nT)+a_1 y(kT+nT-T)+\cdots+a_{n-1}y(kT+T)$$
$$+a_n y(kT)=f(kT) \qquad (1.5)$$

其中a_0，a_1，…，a_{n-1}，a_n均为常数，$k=0$，1，2，3，…，而 n 为固定的自然数，$n\geqslant 1$。又 $y(iT)$表 y 在时刻iT的值，i 为自然数或 0 。i 为负时，$y(iT)=0$。

方程(1.5)是n阶差分方程。其所以称为n阶是因为在方程中出现的最高差为nT。我们可用下述方法把(1.5)化成一组包含n个未知数列的 n 个一阶差分方程。为了给n个未知数列编号，我们改写$x_1(kT)=y(kT)$，并令

$$x_2(kT)=x_1(kT+T)[=y(kT+T)]$$
$$x_3(kT)=x_2(kT+T)[=y(kT+2T)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n(kT)=x_{n-1}(kT+T)[=y(kT+nT-T)]$$

把末式中kT换为 $kT+T$，可有

$$x_n(kT+T)=x_{n-1}(kT+2T)[=y(kT+nT)]$$

于是(1.5)可写成

$$x_n(kT+T)=-\frac{a_n}{a_0}x_1(kT)-\frac{a_{n-1}}{a_0}x_2(kT)-\cdots$$
$$-\frac{a_1}{a_0}x_n(kT)+\frac{1}{a_0}f(kT)$$

从而改写$x_1(kT)=y(kT)$，可见（1.5）等价于一组 n 个一阶差分方程

$$x_2(kT)=x_1(kT+T)$$
$$x_3(kT)=x_2(kT+T)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned}
&x_n(kT)=x_{n-1}(kT+T)\\
&x_n(kT+T)=-\frac{a_n}{a_0}x_1(kT)\\
&-\frac{a_{n-1}}{a_0}x_2(kT)-\cdots-\frac{a_1}{a_0}x_n(kT)\\
&+\frac{1}{a_0}f(kT)
\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

我们把(1.6)写成向量—矩阵型。令

$$\vec{x}(kT)=\begin{pmatrix} x_1(kT)\\ x_2(kT)\\ x_3(kT)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n(kT)\end{pmatrix}\tag{1.7}$$

这是$n\times 1$状态向量。又令

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\
-\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \cdot & \cdots & -\frac{a_1}{a_0}
\end{pmatrix}\tag{1.8}$$

$$\vec{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\cdots\\1/a_0\end{pmatrix}\tag{1.9}$$

它们分别是$n\times n$矩阵和$n\times 1$矩阵。于是(1.6)可写成

$$\vec{x}(kT+T)=\vec{A}\vec{x}(kT)+\vec{B}f(kT)$$

欲证此，注意

$$\vec{x}(kT+T)=\begin{pmatrix} x_1(kT+T)\\ x_2(kT+T)\\ x_3(kT+T)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1}(kT+T)\\ x_n(kT+T)\end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

并且由矩阵乘法有

$$\vec{A}\vec{x}(kT)=\begin{pmatrix} x_2(kT)\\ x_3(kT)\\ x_4(kT)\\ \cdots\cdots\\ x_n(kT)\\ -\frac{a_n}{a_0}x_1(kT)-\frac{a_{n-1}}{a_0}x_2(kT)-\cdots\\ -\frac{a_1}{a_0}x_n(kT)\end{pmatrix}$$

$$\vec{B}f(kT)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \frac{1}{a_0}f(kT)\end{pmatrix}$$

它们是三个$n\times 1$矩阵。由矩阵加法和矩阵相等的定义，可见(1.6)等价于(1.10)。

§2 差分方程解法举例

我们考察一个简单的例子。设有一阶差分方程

$$x(kT+T)+2x(kT)=0 \tag{2.1}$$

试求$x(kT)$。

我们可用递推法求出$x(kT)$：于(2.1) 令$k=0$，可有

$$x(T)+2x(0)=0$$

故

$$x(T)=-2x(0)$$

于(2.1)令$k=1$，可有

$$x(2T)+2x(T)=0$$

故

$$x(2T)=-2x(T)=(-2)^2x(0)$$

再于(2.1)令$k=2$得

$$x(3T)+2x(2T)=0$$

故 $$x(3T)=-2x(2T)=(-2)^3x(0)$$

于是我们可归纳出

$$x(kT)=(-2)^kx(0) \tag{2.2}$$

而由(2.1)可有

$$x(kT+T)=-2x(kT)$$

以(2.2)代入之可得

$$x[(k+1)T]=(-2)^{k+1}x(0)$$

这与(2.2) 有相同的形式，(以$k+1$代(2.2)的k)，故(2.2)

即为所求之解。由$x(0)$的任意性，这解可写成

$$x(kT)=C(-2)^k,$$

C为常数，即C与k无关。

称此解为(2.1)的通解。

这种方法虽然可普遍应用，但对于二阶或更高阶的差分方程，要归纳出通解就繁杂得多。

类似于用拉氏变换解常系数线性微分方程一样，可用z变换解常系数线性差分方程。还是拿(2.1)作例子。我们以z^{-k}遍乘（2.1)，然后取和$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$，可有

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+T)z^{-k}+2\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=0 \tag{2.3}$$

假定收敛。每一个和显然是z的函数。如果设

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=X(z) \tag{2.4}$$

则令$k+1=k'$，可有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+T)z^{-k}&=\sum_{k'=1}^{\infty}x(k'T)z^{-k'+1}\\&=z\sum_{k'=1}^{8}x(k'T)z^{-k'}=z\left[\sum_{k'=0}^{\infty}x(k'T)z^{-k'}-x(0)\right]\\&=z[X(z)-x(0)]\end{aligned} \tag{2.5}$$

以(2.4)及（2.5）代入（2.3）可有

$$z[X(z)-x(0)]+2X(z)=0$$

由此解得

$$X(z)=\frac{zx(0)}{z+2} \tag{2.6}$$

我们再把(2.6)展开为Z^{-1}的幂级数。为此，把(2.6)写成

$$X(z)=\frac{1}{1+2z^{-1}}x(0)$$

如果 $|2Z^{-1}|<1$，即 $|Z|>2$，则可有展开式

$$X(z)=x(0)\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k z^{-k} \tag{2.7}$$

将(2.7)与(2.4)比较，可立刻得到

$$x(kT)=x(0)(-2)^k$$

由此可见，用上面的方法得到的结果和用递推方法得到的结果(2.2)相同。

这里的主要作法是采用变换(2.4)，其中 $X(Z)$ 就称为 $x(kT)$的 z 变换，它类似拉氏变换

$$X(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$$

注意对于一阶差分方程，我们以后将要用到性质(2.5)，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+T)z^{-k}=z[X(z)-x(0)]$$

而对二阶差分方程，以后还将用到：

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+2T)z^{-k}=\sum_{k'=2}^{\infty}x(k'T)z^{-k'+2} \quad (k'=k+2)$$

$$=z^2\left[\sum_{k'=0}^{\infty}x(k'T)z^{-k'}-x(0)-x(T)z^{-1}\right]$$

$$=z^2[X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}] \tag{2.8}$$

一般，以后还将用到

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT+nT)z^{-k}=\sum_{k'=n}^{\infty}x(k'T)z^{-k'+n} \quad (k'=k+n)$$

$$=z^n\sum_{k'=n}^{\infty}x(k'T)z^{-k'}$$

$$=z^n[X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}-\cdots-x(nT-T)z^{-n+1}] \tag{2.9}$$

公式(2.5)，(2.8)，(2.9)称为时间平移公式。(参阅§5)

§ 3　Z变换的定义及简单例子

设

$$0,\ T,\ 2T,\ 3T,\ \cdots,\ kT,\ \cdots \tag{3.1}$$

表示等时差的时间序列，T 表示两相邻时间的间隔（T 一般比较小）。再设

$$x(0),\ x(T),\ x(2T),\ x(3T),\ \cdots,\ x(kT),\ \cdots \tag{3.2}$$

表某信号 x 在(3.1)中各时刻的离散值。

定义

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k} \tag{3.3}$$

为 $x(kT)$的z变换。我们并采用运算记号Z

$$Z[x(kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=X(z) \tag{3.4}$$

这里 z 表复数。假定级数(3.3)在某圆 $|z|>R$ 内收敛(参阅§7)。(3.3)是$z^{-1}=1/z$的幂级数，即z的负幂级数。

我们看几个简单例子。

例1.　$x(kT)=1$

按(3.4)，在 $|z|>1$时，得 1 的 z 变换为

$$Z[1]=\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot z^{-k}=\frac{1}{1-(1/z)}=\frac{z}{z-1} \tag{3.5}$$

例2.　$x(kT)=\mu^k$，μ 为常数，可为复数。

按(3.4)，可见在 $|z|>|\mu|$ 时，得μ^k的 z 变换为

$$Z[\mu^k]=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(\mu/z)^k=$$

$$\frac{1}{1-(\mu/z)}=\frac{z}{z-\mu} \tag{3.6}$$

特别，$\mu=1$，给出例1。

$\mu=-1$给出-1的z变换为$Z[(-1)^k]=\dfrac{z}{z+1}$

$\mu=e^{-aT}$给出e^{-aT}的z变换为$Z[e^{-akT}]=\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$

$\mu=0$，认为$\mu^k=\begin{cases}1, & 在k=0\\ 0, & 在k=1,2,3,\cdots\end{cases}$

则(3.6)仍成立。

例3. $x(kT)=kT$

按(3.4)，可有：在$|z|>1$时给出kT的z变换为

$$Z[kT]=\sum_{k=0}^{\infty}kTz^{-k}=Tz\sum_{k=0}^{\infty}kz^{-k-1}$$

$$=-TZ\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dz}(z^{-k})=-Tz\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}$$

$$=-Tz\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-(1/z)}\right)=-Tz\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$=-Tz\frac{-1}{(z-1)^2}=\frac{Tz}{(z-1)^2} \tag{3.7}$$

例4.于（3.6）中换μ为$\mu e^{j\omega T}$（此后，μ及ω均为实数 $j=\sqrt{-1}$），可有

$$Z[\mu^k e^{j\omega kT}]=\frac{z}{z-\mu e^{j\omega T}}$$

$$=\frac{z(z-\mu e^{-j\omega T})}{(z-\mu e^{j\omega T})(z-\mu e^{-j\omega T})}$$

$$= \frac{z\{(z-\mu\cos\omega T)+j\mu\sin\omega T\}}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$$

分开实部及虚部（z 看作实数），可得$\mu^k\cos(\omega kT)$，$\mu\sin(\omega kT)$的 z 变换分别为

$$Z\left[\mu^k\cos(\omega kT)\right]=\frac{z(z-\mu\cos\omega T)}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$$

$$Z\left[\mu^k\sin(\omega kT)\right]=\frac{z\mu\sin\omega T}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$$

特别，$\mu=1$，可有$\cos(\omega kT)$，$\sin(\omega kT)$的z变换分别为

$$Z\left[\cos(\omega kT)\right]=\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

$$Z\left[\sin(\omega kT)\right]=\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

$\mu=-1$，可有$(-1)^k\cos(k\omega T)$，及$(-1)^k\sin(\omega kT)$的 z 变换分别为

$$Z\left[(-1)^k\cos(\omega kT)\right]=\frac{z(z+\cos\omega T)}{z^2+2z\cos\omega T+1}$$

$$Z\left[(-1)^k\sin(\omega kT)\right]=\frac{-z\sin\omega T}{z^2+2z\cos\omega T+1}$$

§ 4　Z变换与拉氏变换的关系

在§2中，我们已经指出：z 变换

$$Z[x(kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k} \tag{4.1}$$

类似拉氏变换

$$L[x(t)]=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt \tag{4.2}$$

连续自变量的函数 $x(t)$ 相应于离散变量 $x(kT)$。

积分 $\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt$ 相应求和 $\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$

因子 e^{-st} 相应因子 z^{-k}。

要得到两变换的本质联系，须借助于单位脉冲函数。

定义：单位脉冲函数

$$\delta(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{dt},\ (dt>0),\ 在t=0\\ 0,\qquad\qquad\qquad 在别处\end{cases}$$

从而

$$\delta(t-kT)=\begin{cases}\dfrac{1}{dt},\ (dt>0),\ 在t=kT\\ 0,\qquad\qquad\qquad 在别处\end{cases}$$

据此，它们的拉氏变换分别为

$$L[\delta(t)]=\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\frac{1}{dt}\cdot 1\cdot dt=1 \tag{4.3}$$

及 $L[\delta(t-kT)]=\int_0^{\infty}\delta(t-kT)e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{dt}e^{-skT}dt=e^{-skT} \tag{4.4}$$

从数列

$x(0),\ x(T),\ x(2T),\ \cdots,\ x(kT),\ \cdots$

作脉冲函数表示

$$x^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT) \tag{4.5}$$

按(4.4)可得出$x^*(t)$的拉氏变换

$$L[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT} \tag{4.6}$$

在(4.6)中令

$$z = e^{sT} \tag{4.7}$$

亦即

$$s = \frac{1}{T}\ln z \tag{4.8}$$

即得$x(kT)$的z变换

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \tag{4.9}$$

因此

$$Z[x(kT)] = [\text{脉冲函数}x^*(t)\text{ 的 拉氏 变换}]_{e^{sT}=z}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-ksT}\right]_{e^{sT}=z} \tag{4.10}$$

应当指出：(4.10)与(4.9)即(4.1)，并没有本质区别。如果对(4.10)的和式各项作出代换$e^{sT}=z$，那末(4.10)就成为(4.9)。但把无限和化为封闭式时，(4.10)方括号中的和可能比(4.9)中的和稍方便些。我们讨论§3中的四个例子。对于例1，例2，例4，两种和化为封闭式，大致相同。对于例3，(4.10)中的和化为封闭式稍简。对此例，$x(kT)=kT$，(4.10)中的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty} kTe^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{ds}(-e^{-skT}) = -\frac{d}{ds}\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-sT})^k$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-e^{-sT}}\right) = \frac{Te^{-sT}}{(1-e^{-sT})^2} = \frac{Te^{sT}}{(e^{sT}-1)^2}$$

换e^{sT}为z得

$$Z[kT]=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

同(3.7).这里稍简。

再增加三个例子。

例1. $x(kT)=(kT)^2$ (4.10)中的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty}(kT)^2e^{-skT}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^2}{ds^2}e^{-skT}=\frac{d^2}{ds^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}$$

$$=\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{1-e^{-sT}}=\frac{d}{ds}\frac{-Te^{-sT}}{(1-e^{-sT})^2}$$

$$=-T\frac{d}{ds}\frac{e^{sT}}{(e^{sT}-1)^2}=-T\frac{(e^{sT}-1)e^{sT}T-e^{sT}2e^{sT}T}{(e^{sT}-1)^3}$$

$$=T^2\frac{e^{sT}(e^{sT}+1)}{(e^{sT}-1)^3}$$

换$e^{sT}=z$，得

$$Z=[(kT)^2]=\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3} \qquad (4.11)$$

例2. $x(kT)=(kT)^3$ (4.10)中的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-skT}=\sum_{k=0}^{\infty}(kT)^3e^{-skT}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^3}{ds^3}e^{-skT}$$

$$=-\frac{d^3}{ds^3}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}=-\frac{d^3}{ds^3}\frac{1}{1-e^{-sT}}=-\frac{d^3}{ds^3}\frac{e^{sT}}{e^{sT}-1}$$

$$=\frac{d^2}{ds^2}\frac{Te^{sT}}{(e^{sT}-1)^2}=T\frac{d}{ds}\frac{(e^{sT}-1)e^{sT}T-e^{sT}2e^{sT}T}{(e^{sT}-1)^3}$$

$$= -T^2 \frac{d}{ds} \frac{e^{2sT}+e^{sT}}{(e^{sT}-1)^3}$$

$$= -T^2 \frac{(e^{sT}-1)(2e^{2sT}+e^{sT})T-(e^{2sT}+e^{sT})3e^{sT}T}{(e^{sT}-1)^4}$$

$$= T^3 \frac{e^{3sT}+4e^{2sT}+e^{sT}}{(e^{sT}-1)^4}$$

换$e^{sT}=z$，得

$$Z[(kT)^3] = T^3 \frac{z^3+4z^2+z}{(z-1)^4} \qquad (4.12)$$

例3. $x(kT)=(kT)^n$，n为自然数。

(4.10)中的和为

$$\sum_{k=0}^{\infty}(kT)^n e^{-skT} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^n}{ds^n}e^{-skT}$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$= (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{1}{1-e^{-(s+\lambda)T}}\right]_{\lambda=0}$$

$$= (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{1}{1-e^{-(s+\lambda)T}}\right]_{\lambda=0}$$

$$= (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{e^{sT}}{e^{sT}-e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0}$$

换$e^{sT}=z$得

$$Z[(kT)^n] = (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z-e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0} \qquad (4.13)$$

§ 5 Z 换变的性质

（一） 可加性

$$Z[x(kT)+y(kT)]=Z[x(kT)]+Z[y(kT)]$$

即两数列和的 z 变换等于两数列的 z 变换之和。

证 $$Z[x(kT)+y(kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}[x(kT)+y(kT)]z^{-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)z^{-k}$$

$$=Z[x(kT)]+Z[y(kT)]$$ （假定两级数收敛）

（二） 齐次性

设 a 为常数，则

$$Z[ax(kT)]=aZ[x(kT)]$$

即一数列乘以常数 a 的 z 变换等于此数列的 z 变换乘以 a。

证 $$Z[ax(kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}ax(kT)z^{-k}$$

$$=a\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=aZ[x(kT)]$$

推论. c_1，c_2，…，c_p为p个常数，

$x_1(kT)$，$x_2(kT)$，…，$x_p(kT)$为p个数列，

则

$$Z\left[\sum_{i=1}^{p}c_i x_i(kT)\right]=\sum_{i=1}^{p}c_i Z[x_i(kT)]$$

称为线性性质。特别，

$$Z[x(kT)-y(kT)]=Z[x(kT)]-Z[y(kT)]$$

例1. $Z[1-e^{-akT}]=Z[1]-Z[e^{-akT}]$

$$=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

$$= \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

（三）时间的平移

设 n 为固定的自然数，则

$$Z[x(kT-nT)] = z^{-n}Z[x(kT)] \tag{5.1}$$

$$Z[x(kT+nT)] = z^{n}\{Z[x(kT)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\} \tag{5.2}$$

证 $\quad Z[x(kT-nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k}$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} x(kT-nT)z^{-k} \quad (\text{设} x(-T) = x(-2T) = \cdots = 0)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(k'T)z^{-k'-n} \qquad (k' = k-n)$$

$$= z^{-n} \sum_{k'=0}^{\infty} x(k'T)z^{-k'} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$$= z^{-n}Z[x(kT)]$$

这就证明了(5.1)。注意在证明过程中我们用到

$$x(-T) = 0, \quad x(-2T) = 0, \quad \cdots, x(-nT) = 0$$

故(5.1)应更确切地写成

$$Z[x_1(kT)] = z^{-n}Z[x(kT)]$$

其中

$$x_1(kT) = \begin{cases} x(kT-nT), & \text{在} k \geqslant n \\ 0, & \text{在} k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{cases}$$

再证(5.2)

$$Z[x(kT+nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-k}$$

$$= \sum_{k'=n}^{\infty} x(k'T)z^{n-k'} \qquad (k' = k+n)$$

$$= z^n \sum_{k'=n}^{\infty} x(k'T) z^{-k'}$$

$$= z^n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right\}$$

$$= z^n \left\{ Z[x(kT)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT) z^{-k} \right\}$$

即(5.2)得证。

（四）复扩张

若$Z[x(kT)] = X(z)$，则对于任何常数$\mu \neq 0$（μ可为复数），可有

$$Z[\mu^k x(kT)] = X(z/\mu)$$

证 $$Z[\mu^k x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x(kT) z^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(z/\mu)^{-k} = X(z/\mu)$$

例如，由$Z[1] = \dfrac{z}{z-1}$，可得出

$$Z[\mu^k] = \frac{z/\mu}{(z/\mu)-1} = \frac{z}{z-\mu}$$

$$Z[(-\mu)^k] = \frac{z}{z+\mu}$$

又如，由$Z[kT] = \dfrac{Tz}{(z-1)^2}$，可得

$$Z[\mu^k kT] = \frac{T(z/\mu)}{[(z/\mu)-1]^2} = \frac{T\mu z}{(z-\mu)^2}$$

$$Z[(-\mu)^k kT] = -\frac{T\mu z}{(z+\mu)^2}$$

又由 $Z[(kT)^2]=T^2\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$，可有

$$Z[\mu^k(kT)^2]=T^2\frac{(z/\mu)[(z/\mu)+1]}{[(z/\mu)-1]^3}$$

$$=T^2\frac{\mu z(z+\mu)}{(z-\mu)^3}$$

$$Z[(-\mu)^k(kT)^2]=-T^2\frac{\mu z(z-\mu)}{(z+\mu)^3}$$

由 $Z[(kT)^3]=T^3\dfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$，可有

$$Z[\mu^k(kT)^3]=T^3\frac{\mu z(z^2+4\mu z+\mu^2)}{(z-\mu)^4}$$

$$Z[(-\mu)^k(kT)^3]=T^3\frac{-\mu z(z^2-4\mu z+\mu^2)}{(z+\mu)^4}$$

由 $Z[(kT)^n]=(-1)^n\left[\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\quad\dfrac{z}{z-e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0}$

可有 $Z[\mu^k(kT)^n]=(-1)^n\left[\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\quad\dfrac{z}{z-\mu e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0}$

$$Z[(-\mu^k)(kT)^n]=(-1)^n\left[\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\quad\frac{z}{z+\mu e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0}$$

特别，$Z[(-1)^k(kT)^n]=(-1)^n\left[\dfrac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\quad\dfrac{z}{z+e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0}$

最后，由

$$Z[\mu^k\cos(\omega kT)] = \frac{z(z-\mu\cos\omega T)}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$$

$$Z[\mu^k\sin(\omega kT)] = \frac{\mu z\sin\omega T}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$$

换 μ 为 μe^{-aT}，可得

$$Z[\mu^k e^{-akT}\cos(\omega kT)] = \frac{z(z-\mu e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2-2z\mu e^{-aT}\cos\omega T+\mu^2 e^{-2aT}}$$

$$Z[\mu^k e^{-akT}\sin(\omega kT)] = \frac{z\mu e^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2z\mu e^{-aT}\cos\omega T+\mu^2 e^{-2aT}}$$

（五）卷积

设有两数列 $x(kT)$ 及 $y(kT)$

定义：

$$(x*y)(kT) = \sum_{i=0}^{k} x(iT)y(kT-iT)$$

为 $x(kT)$ 及 $y(kT)$ 的卷积。左端 $(x*y)(kT)$ 是卷积的记号。

显然

$$\begin{aligned}(x*y)(kT) &= \sum_{i=0}^{k} x(iT)y(kT-iT)\\ &= x(0)y(kT)+x(T)y(kT-T)+\cdots+x(Tk)y(0)\\ &= \sum_{i=0}^{k} y(iT)x(kT-iT)\\ &= (y*x)(kT)\end{aligned}$$

即卷积满足互换律。

与拉氏变换类似，我们有下列定理。

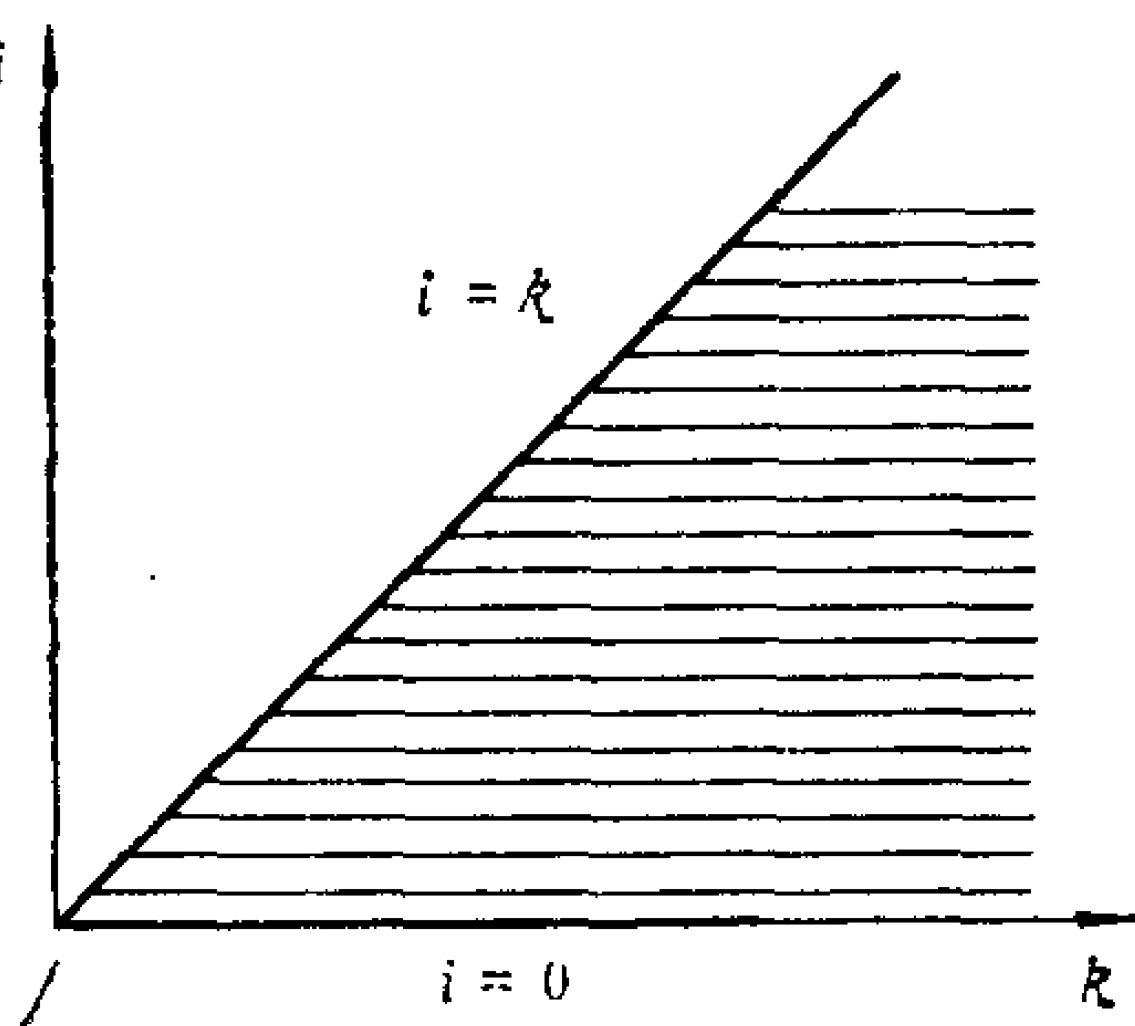
卷积定理

$$Z[(x*y)(kT)]=Z[x(kT)]Z[y(kT)] \tag{5.3}$$

即两数列的卷积的 z 变换等于两数列的各自 z 变换的乘积。

证 $Z[(x*y)(kT)]=Z\left[\sum_{i=0}^{k}x(iT)y(kT-iT)\right]$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{k}x(iT)y(kT-iT)\right\}z^{-k} \tag{5.4}$$



按交换求和次序公式（类似于交换积分次序公式）可见(5.4)中的双和可以交换次序成

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}x(iT)y(kT-iT)z^{-k}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}x(iT)\sum_{k=i}^{\infty}y(kT-iT)z^{-k}\text{（以下令 }k-i=l\text{）}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}x(iT)\sum_{l=0}^{\infty}y(lT)z^{-i-l}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}x(iT)z^{-i}\sum_{j=0}^{\infty}y(jT)z^{-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}\sum_{k=0}^{\infty}y(kT)z^{-k}$$

$$=Z[x(kT)]Z[y(kT)]$$ 证毕

（六）初值定理

设　$Z[x(kT)]=X(z)$如果$X(\infty)$存在为有穷，

则　　　$x(0)=X(\infty)$

证． 按定义，

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}=X(z) \tag{5.5}$$

并且在$|z|>R_1$时，级数绝对收敛，并且一致收敛。今(5.5)可写成

$$\left|X(z)-x(0)-\frac{x(T)}{z}-\cdots-\frac{x(NT)}{z^N}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{x(kT)}{z^k}\right|$$

由级数在$|z|>R_1$的一致收敛性，对于任给$\varepsilon>0$，存在N，当$|z|>R_1$有

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{x(kT)}{z^k}\right|<\varepsilon$$

从而对于这个N，当$|z|>R_1$有

$$\left|X(z)-x(0)-\frac{x(T)}{z}-\frac{x(2T)}{z^2}-\cdots-\frac{x(NT)}{z^N}\right|<\varepsilon$$

令$z=\infty$取极限，即得

$$|X(\infty)-x(0)-0^*|<\varepsilon \quad (0^*\text{表无限小})$$

由ε的任意性，即得

$$X(\infty)-x(0)=0^*$$

舍去0^*即得证。

（七）终值定理

设 $$Z[x(kT)]=X(z)$$

并且$(1-\frac{1}{z})X(z)$在$|z|\geqslant 1$时是解析的，则

$$\lim_{k\to\infty} x(kT)=\lim_{\substack{z\to 1\\|z|\geqslant 1}}(1-\frac{1}{z})X(z)$$

证现有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x(kT)z^{-k}=X(z)\quad(|z|>R)\tag{5.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}=X(z)\quad(|z|>R)$$

将此等式乘以z^{-1}，可有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k-1}=\frac{1}{z}X(z)\quad(|z|>R)$$

换k为$k-1$，可有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x(kT-T)z^{-k}=\frac{1}{z}X(z)\quad(|z|>R)\tag{5.7}$$

从(5.6)减去(5.7)，可有

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x(0)+\sum_{k=1}^{n}[x(kT)-x(kT-T)]z^{-k}\right\}$$

$$=(1-\frac{1}{z})X(z)\tag{5.8}$$

并且(5.8)的收敛域一般可为$|z|>R'$，而$R'\leqslant R$。

注意$\left(1-\frac{1}{z}\right)X(z)$在$z=1$可能呈$0\cdot\infty$。如果此函数在$|z|\geqslant 1$是解析的，那末(5.8)左端级数在$|z|\geqslant 1$时是收敛的。按著名的阿贝耳（Abel）定理，于（5.8）在

$|z|\geqslant 1$ 令 $z\to 1$ 取极限，即得

$$\lim_{n\to\infty}\left\{x(0)+\sum_{k=1}^{n}[x(kT)-x(kT-T)]\right\}$$

$$=\lim_{\substack{z\to 1\\|z|\geqslant 1}}\left(1-\frac{1}{z}\right)X(z)$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x(nT)=\lim\limits_{\substack{z\to 1\\|z|\geqslant 1}}\left(1-\dfrac{1}{z}\right)X(z)$ 证毕

§ 6 性质汇总，Z变换表

$$Z[x(kT)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=X(z)$$

性 质 汇 总

（一）可加性

$Z[x(kT)+y(kT)]=Z[x(kT)]+Z[y(kT)]$

（二）齐次性

$Z[ax(kT)]=aZ[x(kT)]$ a 与 k 无关

（三）时间的平移

n 为自然数，则

$Z[x(kT-nT)]=z^{-n}Z[x(kT)]$

$$Z[x(kT+nT)]=z^{n}\left\{Z[x(kT)]-\sum_{k=0}^{n-1}x(kT)z^{-k}\right\}$$

其中第一式可更确切地写成

$Z[x_1(kT)]=z^{-n}Z[x(kT)]$

而 $$x_1(kT)=\begin{cases}x(kT-nT), & \text{在 } k\geqslant n\\ 0, & \text{在 } k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\end{cases}$$

（四）复扩张

若$Z[x(kT)]=X(z)$，则

$Z[\mu^k x(kT)]=X(z/\mu)$，$\mu\neq 0$与k无关，μ可为 复数。

（五）卷积

$$(x*y)(kT)=\sum_{i=0}^{k}x(iT)y(kT-iT)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}y(iT)x(kT-T)$$

则
$$Z[(x*y)(kT)]=Z[x(kT)]Z[y(kT)]$$

（六）初值定理

若$X(\infty)$存在为有穷数，则

$$x(0)=X(\infty)$$

（七）终值定理

若$\left(1-\frac{1}{z}\right)X(z)$在$|z|\geqslant 1$是解析的，则

$$\lim_{k\to\infty}x(kT)=\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|>1}}\left(1-\frac{1}{z}\right)X(z)$$

Z 变 换 表

1° $Z[1]=\frac{z}{z-1}$

2° $Z[\mu^k]=\frac{z}{z-\mu}$ μ可为复数

$Z[e^{-akT}]=\frac{z}{z-e^{-aT}}$

$3^\circ \quad Z[kT] = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

$4^\circ \quad Z[\mu^k kT] = \frac{T\mu z}{(z-\mu)^2}$

$5^\circ \quad Z[(kT)^2] = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$

$6^\circ \quad Z[\mu^k (kT)^2] = \frac{T^2 \mu z(z+\mu)}{(z-\mu)^3}$

$7^\circ \quad Z[(kT)^3] = \frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$

$8^\circ \quad Z[\mu^k (kT)^3] = \frac{T^3 \mu z(z^2+4\mu z+\mu^2)}{(z-\mu)^4}$

$9^\circ \quad Z[(kT)^n] = (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z-e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0}$

$10^\circ \quad Z[\mu^k (kT)^n] = (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z-\mu e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0}$

$11^\circ \quad Z[(-\mu)^k (kT)^n] = (-1)^n \left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{z}{z+\mu e^{-\lambda T}}\right]_{\lambda=0}$

$12^\circ \quad Z[\cos(\omega kT)] = \frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

$13^\circ \quad Z[\sin(\omega kT)] = \frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

$14^\circ \quad Z[\mu^k\cos(\omega kT)] = \frac{z(z-\mu\cos\omega T)}{z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2}$

15° $Z[\mu^k \sin(\omega kT)] = \dfrac{z\mu \sin\omega T}{z^2 - 2z\mu\cos\omega T + \mu^2}$

16° $Z[\mu^k e^{-akT}\cos(\omega kT)]$

$$= \frac{z(z - \mu e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2 - 2z\mu e^{-aT}\cos\omega T + \mu^2 e^{-2aT}}$$

17° $Z[\mu^k e^{-akT}\sin(\omega kT)]$

$$= \frac{z\mu e^{-aT}\sin\omega T}{z^2 - 2z\mu e^{-aT}\cos\omega T + \mu^2 e^{-2aT}}$$

18° $Z[\mathrm{ch}(\omega kT)] = \dfrac{z(z - \mathrm{ch}\omega T)}{z^2 - 2z\mathrm{ch}\omega T + 1}$

19° $Z[\mathrm{sh}(\omega kT)] = \dfrac{z\,\mathrm{sh}\omega T}{z^2 - 2z\mathrm{ch}\omega T + 1}$

20° $Z[\mu^k \mathrm{ch}(\omega kT)] = \dfrac{z(z - \mu\mathrm{ch}\omega T)}{z^2 - 2z\mu\mathrm{ch}\omega T + \mu^2}$

21° $Z[\mu^k \mathrm{sh}(\omega kT)] = \dfrac{z\mu\mathrm{sh}\omega T}{z^2 - 2z\mu\mathrm{ch}\omega T + \mu^2}$

22° $Z[kT\cos(\omega kT)]$

$$= T\frac{z(z^2+1)\cos\omega T - 2z^2}{(z^2 - 2z\cos\omega T + 1)^2}$$

23° $Z[kT\sin(\omega kT)] = T\dfrac{z(z^2-1)\sin\omega T}{(z^2 - 2z\cos\omega T + 1)^2}$

24° $Z[\mu^k kT\cos(\omega kT)]$

$$= T\frac{\mu z(z^2+\mu^2)\cos\omega T-2\mu^2 z^2}{(z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2)^2}$$

25° $Z[\mu^k kT\sin(\omega kT)] = T\dfrac{\mu z(z^2-\mu^2)\sin\omega T}{(z^2-2z\mu\cos\omega T+\mu^2)^2}$

26° $Z[\mu^k kTe^{-akT}\cos(\omega kT)]$

$$= T\frac{\mu e^{-aT}z(z^2+\mu^2 e^{-2aT})-2\mu^2 e^{-2aT}z^2}{(z^2-2z\mu e^{-aT}\cos\omega T+\mu^2 e^{-2aT})^2}$$

27° $Z[\mu^k kTe^{-akT}\sin(\omega kT)]$

$$= T\frac{\mu e^{-aT}z(z^2-\mu^2 e^{-2aT})\sin\omega T}{(z^2-2z\mu e^{-aT}\cos\omega T+\mu^2 e^{-2aT})^2}$$

28° $Z[kT\text{ch}(\omega kT)] = T\dfrac{z(z^2+1)\text{ch}\omega T-2z^2}{(z^2-2z\,\text{ch}\omega T+1)^2}$

29° $Z[kT\text{sh}(\omega kT)] = T\dfrac{z(z^2-1)\text{sh}\omega T}{(z^2-2z\text{ch}\omega T+1)^2}$

30° $Z[\mu^k kT\text{ch}(\omega kT)]$

$$= T\frac{\mu z(z^2+\mu^2)\text{ch}\omega T-2\mu^2 z^2}{(z^2-2\mu z\text{ch}\omega T+\mu^2)^2}$$

31° $Z[\mu^k kT\text{sh}(\omega kT)] = T\dfrac{\mu z(z^2-\mu^2)\text{sh}\omega T}{(z^2-2\mu z\text{ch}\omega T+\mu^2)^2}$

32° $Z[(kT)^2\cos(\omega kT)]$

$$= T^2\frac{z(z^4-1)\cos\omega T-2z^2(z^2-1)(1+\sin^2\omega T)}{(z^2-2z\cos\omega T+1)^3}$$

33° $Z[(kT)^2\sin(\omega kT)]$

$$=T^2\frac{z(z^4-6z^2+1)\sin\omega T+2z^2(z^2+1)\sin\omega T\cos\omega T}{(z^2-2z\cos\omega T+1)^3}$$

34° $Z[\mu^k(kT)^2\cos(\omega kT)]$

$$=T^2\frac{\mu z(z^4-\mu^4)\cos\omega T-2\mu^2z^2(z^2-\mu^2)(1+\sin^2\omega T)}{(z^2-2\mu z\cos\omega T+\mu^2)^3}$$

35° $Z[\mu^k(kT)^2\sin(\omega kT)]$

$$=\frac{T^2}{(z^2-2\mu z\cos\omega T+\mu^2)^2}[\mu z(z^4-6\mu^2z^2$$

$$+\mu^4)\sin\omega T+2\mu^2z^2(z^2+\mu^2)\sin\omega T\cos\omega T]$$

表中1°～15°不带因子μ^k的各公式已在以前各节中得出。带μ^k因子的各式可由相应不带此因子的各式利用性质（四）得出，而16°及17°则可在14°及15°中换μ为$\mu e^{-\omega T}$得出

由2°，可有 $Z[e^{\omega kT}]=\dfrac{z}{z-e^{\omega T}}$

及 $$Z[e^{-\omega kT}]=\frac{z}{z-e^{-\omega T}}$$

两式和差之半分别给出18°，19°。应用性质（四）在18°及19°即分别得20°及21°。

在4°中取$\mu=e^{i\omega T}$，得

$$z[kTe^{i\omega kT}]=\frac{Tze^{i\omega T}}{(z-e^{i\omega T})^2}$$

$$=\frac{Tze^{i\omega T}(z-e^{-i\omega T})^2}{(z-e^{i\omega T})^2(z-e^{-i\omega T})^2}$$

$$= \frac{Tz(z^2 e^{j\omega T} - 2z + e^{-j\omega T})}{(z^2 - 2z\cos\omega T + 1)^2}$$

$$= \frac{Tz[(z^2+1)\cos\omega T - 2z + j(z^2-1)\sin\omega T]}{(z^2 - 2z\cos\omega T + 1)^2}$$

分开不含 j 的项及含j的项，即得22°及23°。应用性质（四），从22°及23°即得24°及25°。在24°及25°中换 μ 为 μe^{-aT}即得26°及27°。

欲证28°及29°，可在4°中分别取 μ 为$e^{\omega T}$及$e^{-\omega T}$，给出

$$Z[kTe^{\omega kT}] = \frac{Tze^{\omega T}}{(z - e^{\omega T})^2}$$

$$Z[kTe^{-\omega kT}] = \frac{Tze^{-\omega T}}{(z - e^{-\omega T})^2}$$

两式和差之半分别给出

$Z[kT\mathrm{ch}(\omega kT)]$

$$= \frac{1}{2}Tz\left\{\frac{e^{\omega T}}{(z - e^{\omega T})^2} + \frac{e^{-\omega T}}{(z - e^{-\omega T})^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}Tz\frac{e^{\omega T}(z - e^{-\omega T})^2 + e^{-\omega T}(z - e^{\omega T})^2}{(z^2 - 2z\,\mathrm{ch}\,\omega T + 1)^2}$$

$$= Tz\frac{(z^2+1)\mathrm{ch}\,\omega T - 2z}{(z^2 - 2z\,\mathrm{ch}\,\omega T + 1)^2}$$

$Z[kT\mathrm{sh}(\omega kT)]$

$$= \frac{1}{2}Tz\frac{e^{\omega T}(z - e^{-\omega T})^2 - e^{-\omega T}(z - e^{\omega T})^2}{(z^2 - 2z\,\mathrm{ch}\,\omega T + 1)^2}$$

$$= T z \frac{(z^2-1)\mathrm{sh}\omega T}{(z^2-2z\mathrm{ch}\omega T+1)^2}$$

它们分别是28°及29°。应用性质（四），从28°及29°即得30°及31°。

欲证32°及33°，可在6°中取$\mu = e^{j\omega T}$，给出

$$Z[(kT)^2 e^{j\omega kT}] = T^2 z \frac{e^{j\omega T}(z+e^{j\omega T})}{(z-e^{j\omega T})^3}$$

$$= T^2 z \frac{(z+e^{j\omega T})e^{j\omega T}(z-e^{-j\omega T})^3}{(z-e^{j\omega T})^3(z-e^{-j\omega T})^3}$$

$$= T^2 z \frac{(z+e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})e^{j\omega T}(z-e^{-j\omega T})^2}{(z^2-2z\cos\omega T+1)^3}$$

$$= T^2 z \frac{(z^2-1+2jz\sin\omega T)(z^2 e^{j\omega T}-2z+e^{-j\omega T})}{(z^2-2z\cos\omega T+1)^3}$$

$$= T^2 z \frac{[(z^2-1)+2jz\sin\omega T]}{(z^2-2z\cos\omega T+1)^2}$$

$$\times \frac{[(z^2-1)\cos\omega T-2z+j(z^2-1)\sin\omega T]}{(z^2-2z\cos\omega T+1)}$$

分开实部及虚部即得32°及33°。应用性质（四），从32°及33°即得34°及35°。

§ 7 反Z变换

在§3中，我们定义了$x(kT)$的z变换

$$Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z) \tag{7.1}$$

末端$X(z)$是中间z的负幂级数之和，首端是z变换的记号。在§3中，我们曾假定此负幂级数在某圆外$|z|>R$收敛。现在我们来阐明作这种假定的理由。

我们用著名的柯西(Cauchy)根号法来判别(7.1)中级数的收敛或发散。设$x(kT)(k=0, 1, 2, \cdots)$为给定的数列。考察(7.1)中级数第n项(不计第一项)的绝对值的n次方根

$$\sqrt[n]{|x(nT)z^{-n}|}=\sqrt[n]{|x(nT)|}/|z|$$

它的上极限（即最大极限）为

$$\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x(nT)|}/|z|$$

可写

$$R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|x(nT)|}$$

我们知道：对于任何$x(kT)$，R必存在：$0\leqslant R\leqslant\infty$，于是$\rho=R/|z|$。柯西根号法告诉我们：

设$R<\infty$　　$(R\neq\infty)$。

如果$\rho<1$，即$|z|>R$，则(7.1)绝对收敛；

如果$\rho>1$，即$|z|<R$，则(7.1)发散；

如果$\rho=1$，即$|z|=R$，则级数(7.1)的收敛性不能定。

我们还知道：$|z|=R$为中心在原点、半径为R的圆周，$|z|>R$为圆外所成之域，$|z|<R$为圆内所成之域。按上面的结果，我们称圆外$|z|>R$为(7.1)的收敛域。这就是我们在§3中定义z变换时，假定级数$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}$在$|z|>R$内收敛的理由。$X(z)$为这级数的和，它确定在域$|z|>R$。按幂级数理论，(7.1)中右端等式可以逐项求导而不改变其收敛域。因此，和函数$X(z)$在$|z|>R$域是解析的。

现在研究相反的问题。设$X(z)$是一个给定的复变函数，它在某圆外$|z|>R$是解析的，并且存在有穷数$X(\infty)$，我们讨论$X(z)$是否能展成如下的负幂级数

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \tag{7.2}$$

其中$x(kT)$是待定系数。假定(7.2)成立，那末如在§5（六）中，我们有$x(0)=X(\infty)$。至于其他的$x(kT)$（$k=1, 2, \cdots$），我们可用下法求得。取$n\geqslant 1$为某一固定的自然数，并取$R_1>R$，以Γ表圆周$|z|=R_1$，以z^{n-1}遍乘(7.2)，可有

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{n-1-k}=z^{n-1}X(z) \tag{7.3}$$

题设$X(z)$在$|z|>R$是解析的，而$R_1>R$，故$X(z)$在$|z|\geqslant R_1$是解析的，因而$z^{n-1}X(z)$在$|z|\geqslant R_1$是解析的。现在就(7.3)沿圆周Γ：$|z|=R_1$的正向（顺时针）逐项取围道积分，可有

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\oint_{\Gamma} z^{n-1-k}dz=\oint_{\Gamma} z^{n-1}X(z)dz \tag{7.4}$$

根据被积函数$z^{n-1}X(z)$在Γ上的解析性，(7.4)右端积分为有穷数。至于左端逐项积分的合理性，我们暂时不考虑它。对左端所有$k\neq n$的项

$$\oint_{\Gamma} z^{n-1-k}dz=\oint_{\Gamma} d\left(\frac{z^{n-k}}{n-k}\right)=\Delta_{\Gamma}\left(\frac{z^{n-k}}{n-k}\right)=0$$

其中$\Delta_{\Gamma}\left(\frac{z^{n-k}}{n-k}\right)$表示$\frac{z^{n-k}}{n-k}$沿$\Gamma$正向一周的增量。而当$k=n$时，左端所留下的积分为$\oint_{\Gamma} z^{-1}dz$。，对此积分，我们可用变换$z=R_1e^{i\theta}$，$dz=R_1je^{i\theta}d\theta$，又$\Gamma$沿正向一周相当于$\theta$由$2\pi$到0，于是

$$\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z}=-\int_{0}^{2\pi}\frac{R_1 je^{j\theta}d\theta}{R_1 e^{j\theta}}=-\int_{0}^{2\pi}jd\theta=-2\pi j$$

则(7.4)成为

$$-x(nT)2\pi j=\oint_{\Gamma}z^{n-1}X(z)dz$$

从而在 $n\geqslant 1$ 时

$$x=(nT)=\frac{-1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}z^{n-1}X(z)dz$$

其中积分是沿圆周Γ：$|z|=R_1$ 的正向取的，而 R_1 是大于 R 的任何数。

总之，如果 $X(z)$ 为已知，$X(z)$ 在 $|z|>R$ 是解析的，且 $X(\infty)$ 存在为有穷，并且假定(7.2)成立，则

$$x(kT)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2\pi j}\oint_{\Gamma}z^{k-1}X(z)dz, & 在 k\geqslant 1\\ X(\infty), & 在 k=0\end{cases}\tag{7.5}$$

其中Γ表示圆周 $|z|=R_1(>R)$ 的正向一周。

由于我们是假定(7.2)成立，并且没有考虑逐项积分的合理性，所以上述方法是不严密的。但如果我们能证(7.5)中的 $x(kT)$ 确能满足(7.2)，即能证(7.5)中 $x(kT)$ 的 z 变换确为已知的函数 $X(z)$，那末这问题才算圆满解决。现在来讨论(7.5)中的 $x(kT)$ 是否满足(7.2)。为此，我们在(7.5)中作代换 $z=\frac{1}{\zeta}$，则

$$X(z)=X\left(\frac{1}{\zeta}\right)\equiv X_1(\zeta), X_1(\zeta)在|\zeta|<\frac{1}{R}$$

解析 $x(0)=X(\infty)=X_1(0)$

圆周Γ变成$(-\Gamma_1)$，而Γ_1表示圆周$|\zeta|=\frac{1}{R_1}\left(<\frac{1}{R}\right)$的正向一周，$(-\Gamma_1)$表示此圆周负向一周，并且$X_1(\zeta)$在$|\zeta|\leqslant\frac{1}{R_1}$解析；

另外在$k=1, 2, 3, \cdots$时，

$$x(kT)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{(-\Gamma_1)}\zeta^{-k+1}X_1(\zeta)\left(-\frac{1}{\zeta^2}d\zeta\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\zeta^{-k-1}X_1(\zeta)d\zeta$$

把这些代入(7.2)的右端，可有

$$\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}=x(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi j}$$

$$\times\left(\oint_{\Gamma_1}\zeta^{-k-1}X_1(\zeta)d\zeta\right)z^{-k}$$

$$=X_1(0)+\frac{1}{2\pi j}\sum_{k=1}^{\infty}\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{z\zeta}\right)^kX_1(\zeta)d\zeta$$

取$1/z$为Γ_1内任一点，ζ为Γ_1上一点，则

$$\left|\frac{1}{z}\right|<|\zeta|=\frac{1}{R_1}$$

从而

$$\left|\frac{1}{z\zeta}\right|<1$$

故级数$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z\zeta}\right)^k$绝对收敛，并且对$\Gamma_1$上的$\zeta$说，是一致

收敛；又$\frac{1}{\zeta}X_1(\zeta)$在$\Gamma_1$上是解析的，因而其模是有界的，故可交换$\Sigma$及$\oint$的次序，从而上式化成

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}$$

$$= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{z\zeta}\right)^k X_1(\zeta)d\zeta$$

$$= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{\zeta}\ \frac{1/(z\zeta)}{1-[1/(z\zeta)]}X_1(\zeta)d\zeta$$

$$= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\frac{1}{\zeta}\ \frac{1/z}{\zeta-(1/z)}X_1(\zeta)d\zeta$$

$$= X_1(0) + \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\left(-\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta-(1/z)}\right)X_1(\zeta)d\zeta$$

$$= X_1(0) - \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\frac{X_1(\zeta)}{\zeta-0}d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\frac{X_1(\zeta)}{\zeta-(1/z)}d\zeta$$

$$= X_1(0) - X_1(0) + X_1(1/z) = X(z)$$ (Cauchy积分)这就证明了(7.5)中的$x(kT)$的确满足(7.2)。即我们证明了下面的命题

如果 $\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z)$ (7.2)

则

$$x(kT) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{k-1}X(z)dz, & \text{在 } k \geqslant 1 \\ X(\infty), & \text{在 } k = 0 \end{cases}$$

(7.5)

反之也成立。两者构成 z 变换对，并且可分别记如

$$Z[x(kT)]=X(z)$$

$$x(kT)=Z^{-1}[X(z)]$$

对于前一式，我们说 $x(kT)$ 的 z 变换为 $X(z)$，对于后一式，我们说 $X(z)$ 的反 z 变换为 $x(kT)$。

例如 $Z[1]=\dfrac{z}{z-1}$ $\quad 1=Z^{-1}\left[\dfrac{z}{z-1}\right]$

$$Z[\mu^k]=\frac{z}{z-\mu} \quad \mu^k=Z^{-1}\left[\frac{z}{z-\mu}\right]$$

等。

如果 $X(z)$ 为已知，则可用留数法求(7.5)中的围道积分。题设 $z^{k-1}X(z)$ $(k\geqslant 1)$ 在 Γ 上及 Γ 外解析，即在 $|z|\geqslant R_1$ 时解析。我们可先求出 $z^{k-1}X(z)$ 在 Γ 内的不同的极点 $z_i(i=1,2,\cdots)$。由于 R_1 是大于 R 的数，所以这些 z_i 就是 $z^{k-1}X(z)$ 的所有极点，并且假定不再有 $z^{k-1}X(z)$ 的其他异点。以 $\operatorname*{res}\limits_{z_i}[z^{k-1}X(z)]$ 表 $z^{k-1}X(z)$ 在 z_i 的留数，则按留数定理，有

$$\oint_\Gamma z^{k-1}X(z)dz=-2\pi j\sum_i \operatorname*{res}_{z_i}[z^{k-1}X(z)] \quad (k\geqslant 1)$$

代入(7.5)，可得

$$x(kT)=\begin{cases}\sum\limits_i \operatorname*{res}\limits_{z_i}[z^{k-1}X(z)], & k\geqslant 1\\ X(\infty), & k=0\end{cases} \tag{7.6}$$

§ 8　反Z变换的求法

给了某函数$X(z)$，它在$|z|>R$解析，并且存在$X(\infty)$为有穷。一般有三种方法求$X(z)$的反z变换$Z^{-1}[X(z)]$：(i) 查表法，(ii)负幂级数法，(iii)留数法。对前两法有时须配合部分分式展开。现在举一些例子阐明如何运用这些方法。

例1.　$X(z)=\dfrac{z(1-e^{-at})}{(z-1)(z-e^{-at})}$，求反$z$变换。

解　$X(\infty)=0$，　故$x(0)=0$。

(i)　查表法。我们把$X(z)/z$展成部分分式之和：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1-e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-aT}}$$

从而

$$X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}} \tag{8.1}$$

我们所以把$X(z)/z$展开成部分分式之和是由于表中多数z变换的分子含有因子z这一事实所启发。

查表1°及2°立刻得

$Z^{-1}[X(z)]=1-e^{-akT}=x(kT)$

注意这结果对$k=0$也成立：$x(0)=0$。

(ii)负幂级数法。由(8.1)，可有

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \quad [|z| > max(1, e^{-aT})]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-akT}) z^{-k}$$

故 $\quad x(kT) = 1 - e^{-akT} \qquad k = 0, 1, 2 \cdots$

(iii)留数法。用§7的(7.6)这里

$$z^{k-1} X(z) = \frac{z^k(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

它有两个一阶极点：1，e^{-aT}

$$x(kT) = \underset{1}{res}[z^{k-1} X(z)] + \underset{e^{-aT}}{res}[z^{k-1} X(z)]$$

$$= \left[(z-1) \frac{z^k(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} \right]_{z=1}$$

$$+ \left[(z - e^{-aT}) \frac{z^k(1 - e^{-aT})}{(z-1)(z - e^{-aT})} \right]_{z=e^{-aT}}$$

$$= \left. \frac{z^k(1 - e^{-aT})}{z - e^{-aT}} \right|_{z=1} + \left. \frac{z^k(1 - e^{-aT})}{z-1} \right|_{z=e^{-aT}}$$

$$= 1 - e^{-akT} \qquad (k = 0, 1, 2 \cdots)$$

例2. $X(z) = \dfrac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$，求$x(kT)$。

解 这是§6表中的5°。由该公式，可见$x(kT) = (kT)^2$。我们用负幂级数法及留数法验证这结果。

负幂级数法。$X(z)$分子及分母除以z^3可见，在$|z| > 1$时，有

$$X(z)=T^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-3}$$

$$=T^2\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\left(1+3\left(\frac{1}{z}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(k+1)(k+2)}{2}\frac{1}{z^k}+\cdots\right)$$

将上式乘开后可见，其 $1/z^k$的系数为

$$x(kT)=T^2\left[\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}(k-1)k\right]=(kT)^2$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

留数法。$z^{k-1}X(z)=T^2\dfrac{z^k(z+1)}{(z-1)^3}$

$z=1$ 为仅有的一个 3 阶极点。

$$x(kT)=\underset{1}{res}\left[z^{k-1}X(z)\right]=res\left[T^2\frac{z^k(z+1)}{(z-1)^3}\right]$$

$$=\frac{T^2}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z-1)^3\frac{z^k(z+1)}{(z-1)^3}\right\}\right]_{z=1}$$

$$=\frac{T^2}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}(z^{k+1}+z^k)\right]_{z=1}$$

$$=\frac{1}{2}T^2\left[(k+1)kz^{k-1}+k(k-1)z^{k-2}\right]_{z=1}$$

$$=\frac{1}{2}T^2\left[(k+1)k+k(k-1)\right]$$

$$=(kT)^2$$

注意这结果对$k=0$也成立：$x(0)=X(\infty)=0$

例3． $X(z)=\dfrac{az}{z-a}$，求$x(kT)$。

解　负幂级数法。在$|z|>|a|$时，

$$X(z)=\frac{a}{1-(a/z)}=a\left(1+\frac{a}{z}+\cdots+\frac{a^k}{z^k}+\cdots\right)$$

$$x(kT)=(1/z^k)\text{的系数}=a a^k \quad (k=0,1,2,\cdots)①$$

留数法。$Z^{-1}\left[\dfrac{az}{z-a}\right]=\underset{a}{res}\left[z^{k-1}X(z)\right]$

$$=\underset{a}{res}\left[\frac{az^k}{z-a}\right]$$

$$=(z-a)\frac{az^k}{z-a}\Bigg|_{z=a}=aa^k=x(kT)$$

这结果对$k=0$也成立。$x(0)=a=X(\infty)$。

例4． $X(z)=\dfrac{az^2+bz}{(z-a)^2}$，求$x(kT)$。

解　$x(0)=X(\infty)=a$

负幂级数法。在$|z|>|a|$时，

$$X(z)=\left(a+\frac{b}{z}\right)\left(1-\frac{a}{z}\right)^{-2}$$

---

①这结果在$a=0$成立，只须注意：在$a=0$，时

$$a^k=\begin{cases}1, & \text{在}k=0\\ 0, & \text{在}k=1,2,3\cdots\end{cases}$$

$$=\left(a+\frac{b}{z}\right)\left(1+\frac{2a}{z}+\cdots+(k+1)\frac{a^k}{z^k}+\cdots\right)$$

故　$x(kT)=$乘积中$1/z^k$的系数$=a(k+1)a^k+bka^{k-1}$②

这结果在$k=0$也成立：$x(0)=a$。

留数法。

$$x(kT)=\underset{a}{res}[z^{k-1}X(z)]$$

$$=\underset{a}{res}\ \frac{az^{k+1}+bz^k}{(z-a)^2}$$

$$=\left[\frac{d}{dz}\left\{(z-a)^2\frac{az^{k+1}+bz^k}{(z-a)^2}\right\}\right]_{z=a}$$

$$=\left[\frac{d}{dz}\ (az^{k+1}+bz^k)\right]_{z=a}$$

$$=[a(k+1)z^k+bkz^{k-1}]_{z=a}$$

$$=a(k+1)a^k+bka^{k-1}$$

例5.　$X(z)=\dfrac{az^2+bz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$，$\alpha\neq\beta$，求$x(kT)$。

显然：无论用负幂级数法或留数法，可有

$$x(kT)=Z^{-1}\left[\frac{az^2+bz}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right]$$

$$=\frac{a(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})+b(\alpha^k-\beta^k)}{\alpha-\beta}$$

$$(k=0,1,2,3\cdots)$$

---

②$\alpha=0$时，$\alpha^k=\begin{cases}1, 在k=0\\0, 在k=1,2,\cdots\end{cases}$　此结果对$\alpha=0$也成立。

注意在$k=0$,此式给出$x(0)=a=X(\infty)$

又如果于此结果中令$\beta=\alpha$，取实在值，可得

$$Z^{-1}\left[\frac{az^2+bz}{(z-\alpha)^2}\right]=a(k+1)\alpha^k+bk\alpha^k,\text{同例 4 。}$$

例6. $X(z)=\dfrac{az^2+bz}{(z-\alpha)^2+\beta^2}$ $(\beta>0)$,

求$x(kT)$。

解　设$\alpha=\rho\cos\varphi,\beta=\rho\sin\varphi$，则

$$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\qquad \cos\varphi=\alpha/\rho\qquad \sin\varphi=\beta/\rho$$

分母的两个零点为$\rho(\cos\varphi\pm j\sin\varphi)=\rho e^{\pm j\varphi}$。利用例5的结果，可有

$$x(kT)=\frac{1}{2j\rho\sin\varphi}\Big\{a\rho^{k+1}[e^{j(k+1)\varphi}-e^{-j(k+1)\varphi}]$$

$$+b\rho^k[e^{jk\varphi}-e^{-jk\varphi}]\Big\}$$

$$=a\rho^k\frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}+b\rho^{k-1}\frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$$

$$(k=0,1,2,3,\cdots)$$

即　$$Z^{-1}\left[\frac{az^2+bz}{(z-\alpha)^2+\beta^2}\right]=Z^{-1}\left[\frac{az^2+bz}{z^2-2\rho z\cos\varphi+\rho^2}\right]$$

$$=a\rho^k\frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}+b\rho^{k-1}\frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

注意$\varphi=0$取实在值亦得例4的结果。

例7. $X(z)=\dfrac{az^3+bz^2+cz}{(z-\alpha)^3}$，求$x(kT)$。

解 $x(0)=X(\infty)=a$

$$x(kT)=\underset{\alpha}{res}'[z^{k-1}X(z)]$$

$$=\underset{\alpha}{res}\left[\frac{az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^k}{(z-\alpha)^3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}(az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^k)\right]_{z=\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}a(k+2)(k+1)\alpha^k+\frac{1}{2}b(k+1)k\alpha^{k-1}$$

$$+\frac{1}{2}ck(k-1)\alpha^{k-2}$$

这结果对$k=0$也成立：

$$x(0)=\frac{1}{2}a\cdot 2\cdot 1\alpha^0=a=X(\infty)$$

特别，$a=0$，$b=\mu$，$c=\mu^2$，$\alpha=\mu$，给出表中的6°。

例8. $X(z)=\dfrac{az^3+bz^2+cz}{(z-\alpha)^2(z-\beta)}$，　$\alpha\neq\beta$，

求$x(kT)$

解　$x(kT)=\underset{\alpha}{res}[z^{k-1}X(z)]+\underset{\beta}{res}[z^{k-1}X(z)]$

$$=\underset{\alpha}{res}\left[\frac{az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^k}{(z-\alpha)^2(z-\beta)}\right]$$

$$+\underset{\beta}{res}\left[\frac{az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^{k}}{(z-\alpha)^{2}(z-\beta)}\right]$$

$$=\left[\frac{d}{dz}\frac{az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^{k}}{z-\beta}\right]_{z=\alpha}$$

$$+\left.\frac{az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^{k}}{(z-\alpha)^{2}}\right|_{z=\beta}$$

$$=\frac{a(k+2)\alpha^{k+1}+b(k+1)\alpha^{k}+ck\alpha^{k-1}}{(\alpha-\beta)^{2}}$$

$$-\frac{a(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})+b(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})+c(\alpha^{k}-\beta^{k})}{(\alpha-\beta)^{2}}$$

这结果对$k=0$也成立：

$$x(0)=\frac{2a\alpha+b}{\alpha-\beta}-\frac{a(\alpha^{2}-\beta^{2})+b(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^{2}}$$

$$=\frac{2a\alpha+b}{\alpha-\beta}-\frac{a(\alpha+\beta)+b}{\alpha-\beta}=a \qquad \text{而} X(\infty)=a$$

例9. $X(z)=\dfrac{az^{3}+bz^{2}+cz}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}$ $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$，

求$x(kT)$。

用留数法，易求得

$$x(kT)=\frac{a\alpha^{k+2}+b\alpha^{k+1}+c\alpha^{k}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$+\frac{a\beta^{k+2}+b\beta^{k+1}+c\beta^{k}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{a\gamma^{k+2}+b\gamma^{k+1}+c\gamma^{k}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

这结果对$k=0$也成立。$k=0$，可有

$$x(0)=\frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{a\beta^2+b\beta+c}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$+\frac{a\gamma^2+b\gamma+c}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)(\beta-\gamma)+(a\beta^2+b\beta+c)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$\times\frac{(\gamma-\alpha)+(a\gamma^2+b\gamma+c)(\alpha-\beta)}{(\beta-\gamma)}$$

显然在$\alpha=\beta$，$\alpha=\gamma$，$\beta=\gamma$时，分子均为0，故分子可化成$a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$，从而$x(0)=a=X(\infty)$。

例10. $X(z)=\dfrac{az^3+bz^2+cz}{[(z-\alpha)^2+\beta^2](z-\gamma)}$，

求$x(kT)$。

解 设$\alpha=\rho\cos\varphi$， $\beta=\rho\sin\varphi$，则$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，

$\cos\varphi=\alpha/\rho$， $\sin\varphi=\beta/\rho$，

分母的三零点为$\alpha\pm j\beta=\rho e^{\pm j\varphi}$及$\gamma$。

$$x(kT)=2R\left\{\underset{\rho e^{j\varphi}}{res}\left[\frac{az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^k}{[(z-\alpha)^2+\beta^2](z-\gamma)}\right]\right\} \text{①}$$

$$+\underset{\gamma}{res}\left[\frac{az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^k}{[(z-\alpha)^2+\beta^2](z-\gamma)}\right]$$

$$=2R\left\{\left[\frac{az^{k+2}+bz^{k+1}+cz^k}{(z-\rho e^{-j\varphi})(z-\gamma)}\right]_{z=\rho e^{j\varphi}}\right\}$$

$$+\frac{a\gamma^{k+2}+b\gamma^{k+1}+c\gamma^k}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$$

---

① R表实部

$$= 2R\left\{\frac{\rho^k[a\rho^2 e^{i(k+2)\varphi} + b\rho e^{i(k+1)\varphi} + ce^{ik\varphi}]}{\rho(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})(\rho e^{i\varphi} - \gamma)}\right\}$$

$$+ \frac{a\gamma^{k+2} + b\gamma^{k+1} + c\gamma^k}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$= R\left\{\frac{\rho^k[a\rho^2 e^{i(k+2)\varphi} + b\rho e^{i(k+1)\varphi} + ce^{ik\varphi}]}{\rho j\sin\varphi(\rho e^{i\varphi} - \gamma)}\right.$$

$$\left.\times \frac{(\rho e^{-i\varphi} - \gamma)}{(\rho e^{-i\varphi} - \gamma)}\right\} + \frac{ar^{k+2} + br^{k+1} + cr^k}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$= R\left\{\frac{\rho^k[a\rho^2 e^{i(k+1)\varphi} + b\rho e^{ik\varphi} + ce^{i(k-1)\varphi}]}{j\sin\varphi[(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]}\right.$$

$$\left. - \frac{\rho^R\gamma[a\rho^2 e^{i(R+2)\varphi} + b\rho e^{i(k+1)\varphi} + ce^{ik\varphi}]}{\rho j\sin\varphi[(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]}\right\}$$

$$+ \frac{ar^{k+2} + br^{k+1} + cr^k}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{\rho^k[a\rho^2\sin(k+1)\varphi + b\rho\sin k\varphi + c\sin(k-1)\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]}$$

$$- \frac{\rho^{k-1}\gamma[a\rho^2\sin(k+2)\varphi + b\rho\sin(k+1)\varphi + c\sin k\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2]}$$

$$+ \frac{\gamma^k(a\gamma^2 + b\gamma + c)}{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} \qquad ①$$

这结果对$k = 0$也成立。在$k = 0$时，可有

①由读者验证：$\varphi = 0$（即$\beta = 0$），取极限即给出例8。

$$x(0)=\frac{a\rho^2\sin\varphi-c\sin\varphi-\rho^{-1}\gamma(a\rho^2\sin 2\varphi+b\rho\sin\varphi)}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]}$$

$$+\frac{a\gamma^2+b\gamma+c}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=\frac{a\rho^2-c-\gamma(2a\rho\cos\varphi+b)+a\gamma^2+b\gamma+c}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=\frac{a(\alpha^2+\beta^2)-2a\gamma\alpha+a\gamma^2}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$=a$$

$$=X(\infty)$$

例11. $X(z)=\dfrac{az^4+bz^3+cz^2+dz}{(z-\alpha)^4}$，求$x(kT)$。

解 $x(kT)=\underset{\alpha}{res}\dfrac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+dz^k}{(z-\alpha)^4}$

$$=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}(az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^k)\Big|_{z=\alpha}$$

$$=\frac{1}{6}[a(k+3)(k+2)(k+1)\alpha^k$$

$$+b(k+2)(k+1)k\alpha^{k-1}+c(k+1)k(k-1)\alpha^{k-2}$$

$$+d\cdot k(k-1)(k-2)\alpha^{k-3}]$$

注意这结果对$k=0$也成立。在$k=0$时，可有

$$x(0)=\frac{1}{6}a\cdot 3\cdot 2\cdot 1=a=X(\infty)$$

特别，$a=0$，$b=\mu$，$c=4\mu^2$，$d=\mu^3$，$\alpha=\mu$，

$$X(z)=\frac{\mu z^3+4\mu^2z^2+\mu^3z}{(z-\mu)^4}=\frac{\mu z(z^2+4\mu z+\mu^2)}{(z-\mu)^4}$$

$$x(kT)=\frac{1}{6}[\mu(k+2)(k+1)k\mu^{k-1}$$

$$+4\mu^2(k+1)k(k-1)\mu^{k-2}$$

$$+\mu^3k(k-1)(k-2)\mu^{k-3}]$$

$$=\frac{1}{6}\mu^k k[(k^2+3k+2)+4(k^2-1)$$

$$+(k^2-3k+2)]$$

$$=\frac{1}{6}\mu^k k\,6\,k^2=\mu^k k^3$$

这给出表中公式8°。

例12. $X(z)=\dfrac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{(z-\alpha)^3(z-\beta)}$， 求$x(kT)$。

解 $$x(kT)=\underset{\alpha}{res}\left[\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^k}{(z-\alpha)^3(z-\beta)}\right]$$

$$+\underset{\beta}{res}\left[\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+dz^k}{(z-\alpha)^3(z-\beta)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dz^2}\frac{az^{k+3}+bz^{kk2}+cz^{k+1}+dz^k}{z-\beta}\right]_{z=\alpha}$$

$$+\frac{a\beta^{k+3}+b\beta^{k+2}+c\beta^{k+1}+d\cdot\beta^k}{(\beta-\alpha)^3}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{a(k+3)(k+2)\alpha^{k+1}+b(k+2)(k+1)\alpha^k}{\alpha-\beta}\right.$$

$$+\frac{c(k+1)k\alpha^{k-1}+d\cdot k(k-1)\alpha^{k-2}}{\alpha-\beta}$$

$$-2\frac{a(k+3)\alpha^{k+2}+b(k+2)\alpha^{k+1}+c(k+1)\alpha^{k}+dk\alpha^{k-1}}{(\alpha-\beta)^{2}}$$

$$\left.+2\cdot\frac{a\alpha^{k+3}+b\alpha^{k+2}+c\alpha^{k+1}+d\alpha^{k}}{(\alpha-\beta)^{3}}\right]$$

$$-\frac{a\beta^{k+3}+b\beta^{k+2}+c\beta^{k+1}+d\cdot\beta^{k}}{(\alpha-\beta)^{3}}$$

$$=\frac{1}{2(\alpha-\beta)}[a(k+3)(k+2)\alpha^{k+1}$$

$$+b(k+2)(k+1)\alpha^{k}+c(k+1)k\alpha^{k-1}+d\cdot k(k-1)\alpha^{k-2}]$$

$$-\frac{1}{(\alpha-\beta)^{2}}[a(k+3)\alpha^{k+2}+b(k+2)\alpha^{k+1}+c(k+1)\alpha^{k}$$

$$+dk\alpha^{k-1}]+\frac{1}{(\alpha-\beta)^{3}}[a(\alpha^{k+3}-\beta^{k+3})$$

$$+b(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})+c(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})+d(\alpha^{k}-\beta^{k})]$$

此结果对$k=0$也成立。在$k=0$时，可有

$$x(0)=\frac{6a\alpha+2b}{2(\alpha-\beta)}-\frac{3a\alpha^{2}+2b\alpha+c}{(\alpha-\beta)^{2}}$$

$$+\frac{a(\alpha^{3}-\beta^{3})+b(\alpha^{2}-\beta^{2})+c(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^{3}}$$

$$=\frac{3a\alpha+b}{\alpha-\beta}-\frac{3a\alpha^{2}+2b\alpha+c}{(\alpha-\beta)^{2}}$$

$$+\frac{a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+c}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{3a\alpha+b}{\alpha-\beta}+\frac{a(-2\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{3a\alpha+b}{\alpha-\beta}-\frac{a(\beta+2\alpha)+b}{\alpha-\beta}=\frac{a\alpha+a\beta}{\alpha-\beta}$$

$$=a=X(\infty)$$

例13. $X(z)=\dfrac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}$， 求$x(kT)$。

解 $$x(kT)=\operatorname*{res}_{\alpha}\left[\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+dz^k}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\right]$$

$$+\operatorname*{res}_{\beta}\left[\frac{az^{k+3}}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\right]$$

$$=\left[\frac{d}{dz}\,\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^k}{(z-\beta)^2}\right]_{z=\alpha}$$

$$+\left[\frac{d}{dz}\,\frac{az^{k+3}bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^k}{(z-\alpha)^2}\right]_{z=\beta}$$

$$=\frac{a(k+3)(\alpha^{k+2}+\beta^{k+2})+b(k+2)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$+\frac{c(k+1)(\alpha^k+\beta^k)+dk(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$-2\,\frac{a(\alpha^{k+3}-\beta^{k+3})+b(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})}{(\alpha-\beta)^3}$$

$$+c\frac{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})+d(\alpha^{k}-\beta^{k})}{(\alpha-\beta)^{3}}$$

这公式对$k=0$也成立。在$k=0$时，可有

$$x(0)=\frac{3a(\alpha^2+\beta^2)+2b(\alpha+\beta)+2c}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$-2\frac{a(\alpha^3-\beta^3)+b(\alpha^2-\beta^2)+c(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^3}$$

$$=\frac{3a(\alpha^2+\beta^2)+2b(\alpha+\beta)+2c}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$-2\frac{a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+c}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$=\frac{a(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)^2}=a=X(\infty)$$

例14. $X(z)=\dfrac{az^4+bz^3+cz^2+dz}{(z-\alpha)^2(z-\beta)(z-\gamma)}$，

求$x(kT)$。

解 $$x(kT)=\underset{\alpha}{res}\left[\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^{k}}{(z-\alpha)^2(z-\beta)(z-\gamma)}\right]$$

$$+\underset{\beta}{res}\left[\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+dz^{k}}{(z-\alpha)^2(z-\beta)(z-\gamma)}\right]$$

$$+\underset{\gamma}{res}\left[\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+dz^{k}}{(z-\alpha)^2(z-\beta)(z-\gamma)}\right]$$

$$=\left[\frac{d}{dz}\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^{k}}{(z-\beta)(z-\gamma)}\right]_{z=\alpha}$$

$$+\frac{a\beta^{k+3}+b\beta^{k+2}+c\beta^{k+1}+d\cdot\beta^{k}}{(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)}$$

$$+\frac{a\gamma^{k+3}+b\gamma^{k+2}+c\gamma^{k+1}+d\cdot\gamma^{k}}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)}$$

$$=\frac{a(k+3)\alpha^{k+2}+b(k+2)\alpha^{k+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$+\frac{c(k+1)\alpha^{k}+d\cdot k\alpha^{k-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$-\frac{(a\alpha^{k+3}+b\alpha^{k+2}+c\alpha^{k+1}+d\cdot\alpha^{k})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\times\frac{(2\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)^2}$$

$$+\frac{a\beta^{k+3}+b\beta^{k+2}+c\beta^{k+1}+d\cdot\beta^{k}}{(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)}$$

$$+\frac{a\gamma^{k+3}+b\gamma^{k+2}+c\gamma^{k+1}+d\cdot\gamma^{k}}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)}$$

这结果对$k=0$也成立。在$k=0$时有

$$x(0)=\frac{3a\alpha^2+2b\alpha+c}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$-\frac{(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)(2\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2}$$

$$+\frac{a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d}{(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)}+\frac{a\gamma^3+b\gamma^2+c\gamma+d}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)}$$

把右端第二项分子的因子 $2\alpha-\beta-\gamma$ 写成$(\alpha-\beta)+(\alpha-\gamma)$。然后将这项分为两项，各与第三项及第四项结合，可有

$$x(0)=\frac{3a\alpha^2+2b\alpha+c}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$+\left\{\frac{a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d}{(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)}-\frac{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)}\right\}$$

$$+\left\{\frac{a\gamma^3+b\gamma^2+c\gamma+d}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)}-\frac{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}{(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\beta)}\right\}$$

$$=\frac{3a\alpha^2+2b\alpha+c}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\quad\frac{(a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}$$

$$-\frac{(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)(\beta-\gamma)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha-\gamma)^2}\left\{\frac{(a\gamma^3+b\gamma^2+c\gamma+d)(\alpha-\beta)}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}\right.$$

$$\left.-\frac{(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)(\gamma-\beta)}{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)}\right\}$$

$$=\frac{3a\alpha^2+2b\alpha+c}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$+\frac{-[a\alpha\beta(\beta+\alpha)+b\alpha\beta-d]}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$$

$$+\frac{r[a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+b(\beta+\alpha)+c]}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$$

$$+\frac{-[a\alpha\gamma(\gamma+\alpha)+b\alpha\gamma+d]}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}$$

$$+\frac{\beta[a(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)+b(\gamma+\alpha)+c]}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}$$

$$=\frac{3a\alpha^2+2b\alpha+c}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$-\frac{2a\alpha^2+2b\alpha+a\alpha\beta+a\alpha\gamma-a\beta\gamma+c}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$=\frac{a\alpha^2-a\alpha\beta-a\alpha\gamma+a\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$=a$$

$$=X(\infty)$$

例15. $X(z)=\dfrac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{[(z-\alpha)^2+\beta^2]^2}$，求$x(kT)$。

解　$\alpha=\rho\cos\varphi$，$\beta=\rho\sin\varphi$，分母四零点为

$\rho e^{\pm i\varphi}$，$\rho e^{\pm i\varphi}$。

$$x(kT)=2R\left\{\underset{\rho e^{i\varphi}}{res}\ \frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^k}{(z-\rho e^{i\varphi})^2(z-\rho e^{-i\varphi})^2}\right\}$$

$$=2R\left\{\left[\frac{d}{dz}\ \frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^k}{(z-\rho e^{-i\varphi})^2}\right]_{z=\rho e^{i\varphi}}\right\}$$

$$=2R\left\{\rho^{k-1}\left[\frac{a(k+3)\rho^3e^{i(k+2)\varphi}+b(k+2)\rho^2e^{i(k+1)\varphi}}{\rho^2(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})^2}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{c(k+1)\rho e^{ik\varphi}+d\cdot ke^{i(k-1)\varphi}}{\rho^2(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})^2}\right]$$

$$-2\rho^k\left[\frac{a\rho^3e^{i(k+3)\varphi}+b\rho^2e^{i(k+2)\varphi}}{\rho^3(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})^3}\right.$$

$$+\frac{c\rho e^{i(k+1)\varphi}+d\cdot e^{ik\varphi}}{\rho^3(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})^3}\Big]\Big\}$$

$$=-\frac{1}{2\beta^2}\rho^{k-1}\ [a(k+3)\rho^3\cos(k+2)\varphi$$

$$+b(k+2)\rho^2\cos(k+1)\varphi+c(k+1)\rho\cos k\varphi$$

$$+d\cdot k\cos(k-1)\varphi]$$

$$+\frac{1}{2\beta^3}\rho^k[a\rho^3\sin(k+3)\varphi+b\rho^2\sin(k+2)\varphi$$

$$+c\rho\sin(k+1)\varphi+d\cdot\sin k\varphi]$$

这结果对$k=0$也成立．在$k=0$，有

$$x(0)=-\frac{1}{2\beta^2}\rho^{-1}(3a\rho^3\cos2\varphi+2b\rho^2\cos\varphi+c\rho)$$

$$+\frac{1}{2\beta^3}(a\rho^3\sin3\varphi+b\rho^2\sin2\varphi+c\rho\sin\varphi)$$

$$=-\frac{1}{2\beta^2}[3a(\alpha^2-\beta^2)+2b\alpha+c]$$

$$+\frac{1}{2\beta^3}[a\beta(3\alpha^2-\beta^2)+2b\alpha\beta+c\beta]$$

$$=\frac{1}{2\beta^2}\cdot a\cdot2\beta^2$$

$$=a$$

$$=X(\infty)$$

§ 9 Z变换（表续）

现将§ 8 例 3 及以后各例结果汇总如下。

z变换表续

36° $Z^{-1}\left[\frac{az}{z-\alpha}\right]=a\alpha^{k}$ （$\alpha=0$ 也成立，阅§8. 例 3 底注①）

37° $Z^{-1}\left[\frac{az^{2}+bz}{(z-\alpha)^{2}}\right]=a(k+1)\alpha^{k}+bk\alpha^{k-1}$

38° $Z^{-1}\left[\frac{az^{2}+bz}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right]$

$$=\frac{a(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})+b(\alpha^{k}-\beta^{k})}{\alpha-\beta}$$

39° $Z^{-1}\left[\frac{az^{2}+bz}{(z-\alpha)^{2}+\beta^{2}}\right]=\frac{1}{\beta}\rho^{k}[a\rho\sin(k+1)\varphi$

$+b\sin k\varphi]$

$(\alpha=\rho\cos\varphi,\ \beta=\rho\sin\varphi)$

40° $Z^{-1}\left[\frac{az^{3}+bz^{2}+cz}{(z-\alpha)^{3}}\right]=\frac{a}{2}(k+2)(k+1)\alpha^{k}$

$$+\frac{b}{2}(k+1)k\alpha^{k-1}+\frac{c}{2}k(k-1)\alpha^{k-2}$$

41° $Z^{-1}\left[\frac{az^{3}+bz^{2}+cz}{(z-\alpha)^{2}(z-\beta)}\right]$

$$= \frac{a(k+2)\alpha^{k+1} + b(k+1)\alpha^{k} + ck\alpha^{k-1}}{\alpha - \beta}$$

$$- \frac{a(\alpha^{k+2} - \beta^{k+2}) + b(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) + c(\alpha^{k} - \beta^{k})}{(\alpha - \beta)^2}$$

42° $Z^{-1}\left[\frac{az^3 + bz^2 + cz}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}\right]$

$$= \frac{a\alpha^{k+2} + b\alpha^{k+1} + c\alpha^{k}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$+ \frac{a\beta^{k+2} + b\beta^{k+1} + c\beta^{k}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$+ \frac{a\gamma^{k+2} + b\gamma^{k+1} + c\gamma^{k}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

43° $Z^{-1}\left[\frac{az^3 + bz^2 + cz}{[(z-\alpha)^2 + \beta^2](z-\gamma)}\right]$

$$= \frac{\rho^{k}[a\rho^2\sin(k+1)\varphi + b\rho\sin k\varphi + c\sin(k-1)\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2 + \beta^2]}$$

$$- \frac{\rho^{k-1}\gamma[a\rho^2\sin(k+2)\varphi + b\rho\sin(k+1)\varphi + c\sin k\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2 + \beta^2]}$$

$$+ \frac{\gamma^{k}(a\gamma^2 + b\gamma + c)}{(\gamma-\alpha)^2 + \beta^2} \qquad (\alpha = \rho\cos\varphi,\ \ \beta = \rho\sin\varphi)$$

44° $Z^{-1}\left[\frac{az^4 + bz^3 + cz^2 + d\cdot z}{(z-\alpha)^4}\right]$

$$= \frac{1}{6}[a(k+3)(k+2)(k+1)\alpha^{k} +$$

$$+b(k+2)(k+1)k\alpha^{k-1}+c(k+1)k(k-1)\alpha^{k-2}$$
$$+d\cdot k(k-1)(k-2)\alpha^{k-3}]$$

45° $Z^{-1}\left[\dfrac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{(z-\alpha)^3(z-\beta)}\right]$

$$=\frac{a(k+3)(k+2)\alpha^{k+1}+b(k+2)(k+1)\alpha^{k}}{2(\alpha-\beta)}$$
$$+\frac{c(k+1)k\alpha^{k-1}+d\cdot k(k-1)\alpha^{k-2}}{2(\alpha-\beta)}$$
$$-\frac{a(k+3)\alpha^{k+2}+b(k+2)\alpha^{k+1}}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$+\frac{c(k+1)\alpha^{k}+d\cdot k\alpha^{k-1}}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$+\frac{a(\alpha^{k+3}-\beta^{k+3})+b(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})}{(\alpha-\beta)^3}$$
$$+\frac{c(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})+d\cdot(\alpha^{k}-\beta^{k})}{(\alpha-\beta)^3}$$

46° $Z^{-1}\left[\dfrac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\right]$

$$=\frac{a(k+3)(\alpha^{k+2}+\beta^{k+2})+b(k+2)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$+\frac{c(k+1)(\alpha^{k}+\beta^{k})+d\cdot k(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$-2\,\frac{a(\alpha^{k+3}-\beta^{k+3})+b(\alpha^{k+2}-\beta^{k+2})}{(\alpha-\beta)^3}$$

$$+\frac{c(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})+d(\alpha_k-\beta_k)}{(\alpha-\beta)^3}$$

47° $Z^{-1}\left[\frac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)(z-\gamma)}\right]$

$$=\frac{a(k+3)\alpha^{k+2}+b(k+2)\alpha^{k+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$+\frac{c(k+1)\alpha^k+d\cdot k\alpha^{k-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$-\frac{\alpha^k(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)(2\alpha-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2}$$

$$+\frac{\beta^k(a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d)}{(\beta-\alpha)^2(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^k(a\gamma^3+b\gamma^2+c\gamma+d)}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)}$$

48° $Z^{-1}\left[\frac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}\right]$

$$=\frac{\alpha^k(a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$

$$+\frac{\beta^k(a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$

$$+\frac{\gamma^k(a\gamma^3+b\gamma^2+c\gamma+d)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{\delta^k(a\delta^3+b\delta^2+c\delta+d)}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}$$

49° $Z^{-1}\left[\frac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{[(z-\alpha)^2+\beta^2]^2}\right]$

$$=-\frac{1}{2\beta^2}\rho^{k-1}\ [a\rho^3(k+3)\cos(k+2)\varphi+$$

$$+b\rho^2(k+2)\cos(k+1)\varphi+c\rho(k+1)\cos k\varphi$$

$$+d\cdot k\cos(k-1)\varphi]$$

$$+\frac{1}{2\beta^3}\rho^k[a\rho^3\sin(k+3)\varphi+b\rho^2\sin(k+2)\varphi$$

$$+c\rho\sin(k+1)\varphi+d\sin k\varphi]$$

$$(\alpha=\rho\cos\varphi,\quad \beta=\rho\sin\varphi)$$

50° $Z^{-1}\left[\frac{az^4+bz^3+cz^2+d\cdot z}{[(z-\alpha)^2+\beta^2](z-\gamma)^2}\right]$

$$=\frac{\rho^{k+1}[a\rho^3\sin(k+1)\varphi+b\rho^2\sin k\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

$$+\frac{\rho^{k+1}[c\rho\sin(k-1)\varphi+d\cdot\sin(k-2)\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

$$-\frac{2\rho^k\gamma[a\rho^3\sin(k+2)\varphi+b\rho^2\sin(k+1)\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

$$-\frac{2\rho^k\gamma[c\rho\sin k\varphi+d\cdot\sin(k-1)\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

$$+\frac{\rho^{k-1}\gamma^2[a\rho^3\sin(k+3)\varphi+b\rho^2\sin(k+2)\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

$$+\frac{\rho^{k-1}\gamma^2[c\rho\sin(k+1)\varphi+d\cdot\sin k\varphi]}{\sin\varphi[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

$$+\frac{\gamma^{k-1}[a(k+3)\gamma^3+b(k+2)\gamma^2+c(k+1)\gamma+d\cdot k]}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$-2(\gamma-\alpha)\ \frac{\gamma^{k}(a\gamma^{3}+b\gamma^{2}+c\gamma+d)}{[(\gamma-\alpha)^{2}+\beta^{2}]^{2}} \qquad \begin{pmatrix}\alpha=\rho\cos\varphi\\ \beta=\rho\sin\varphi\end{pmatrix}$$

公式36°—50°，除48°及50°外，均已见§8各例。至于48°证明较易，读者自己作。对于50°，设

$$X(z)=\frac{az^{4}+bz^{3}+cz^{2}+d\cdot z}{[(z-\alpha)^{2}+\beta^{2}](z-\gamma)^{2}}$$

令$\alpha=\rho\cos\varphi$，$\beta=\rho\sin\varphi$，则$X(z)$的分母的零点为

$$\rho e^{i\varphi},\ \rho e^{-i\varphi},\ \gamma,\ \gamma,$$

故

$$Z^{-1}[X(z)]=2R\left\{\underset{\rho e^{i\varphi}}{res}\ [z^{k-1}X(z)]\right\}$$

$$+\underset{\gamma}{res}[z^{k-1}X(z)]$$

$$=2R\left\{\underset{\rho e^{i\varphi}}{res}\ \frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^{k}}{(z-\rho e^{i\varphi})(z-\rho e^{-i\varphi})(z-\gamma)^{2}}\right\}$$

$$+\underset{\gamma}{res}\frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^{k}}{[(z-\alpha)^{2}+\beta^{2}](z-\gamma)^{2}}$$

$$=2R\rho^{k}\left[\frac{a\rho^{3}e^{i(k+3)\varphi}+b\rho^{2}e^{i(k+2)\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-\rho e^{-i\varphi})(\rho e^{i\varphi}-\gamma)^{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{c\rho e^{i(k+1)\varphi}+d\cdot e^{ik\varphi}}{(\rho e^{i\varphi}-\rho e^{-i\varphi})(\rho e^{i\varphi}-\gamma)^{2}}\right]$$

$$+\left[\frac{d}{dz}\ \frac{az^{k+3}+bz^{k+2}+cz^{k+1}+d\cdot z^{k}}{(z-\alpha)^{2}+\beta^{2}}\right]_{z=\gamma}$$

$$=R\left\{\rho^{k}\left[\frac{a\rho^{3}e^{i(k+3)\varphi}+b\rho^{2}e^{i(k+2)\varphi}}{\rho j\sin\varphi(\rho e^{i\varphi}-\gamma)^{2}}+\right.\right.$$

$$+\frac{c\rho e^{j(k+1)\varphi}d\cdot e^{jk\varphi}}{\rho j\sin\varphi(\rho e^{j\varphi}-\gamma)^2}\Big]\cdot\frac{(\rho e^{-j\varphi}-\gamma)^2}{(\rho e^{-j\varphi}-\gamma)^2}\Big\}$$

$$+\frac{a(k+3)\gamma^{k+2}+b(k+2)\gamma^{k+1}+c(k+1)\gamma^k}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$+\frac{d\cdot k\gamma^{k-1}}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$-2\ (\gamma-\alpha)\ \frac{a\gamma^{k+3}+b\gamma^{k+2}+c\gamma^{k+1}+d\cdot\gamma^k}{[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2}$$

注意$(\rho e^{j\varphi}-\gamma)^2(\rho^{-j\varphi}-\gamma)^2=[(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]^2$，并分出上式的实部即得50°。前表1°—35°便于查z变换，续表36°—50°便于查反z变换。

§10 反Z变换的数字例子

例1. $X(z)=\frac{z^2-z}{(z-2)^2}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解 用37°，可立刻得到

$$Z^{-1}[X(z)]=(k+1)2^k-k\cdot2^{k-1}=2^{k-1}(k+2)$$

验. $Z[2^{k-1}(k+2)]=\frac{1}{2}Z[2^k k]+Z[2^k]$

$$=\frac{z}{(z-2)^2}+\frac{z}{z-2}=\frac{z^2-z}{(z-2)^2}\quad(\text{由}4°\text{及}2°)$$

例2. $X(z)=\frac{z^2-z}{z^2-z-2}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解. $X(z)=\dfrac{z^2-z}{(z+1)(z-2)}$，由38°，可有

$$Z^{-1}[X(z)]=\frac{(-1)^{k+1}-2^{k+1}-[(-1)^k-2^k]}{-3}$$

$$=\frac{2}{3}(-1)^k+\frac{1}{3}\cdot 2^k$$

验. $Z\left[\dfrac{2}{3}(-1)^k+\dfrac{1}{3}\cdot 2^k\right]=\dfrac{2}{3}Z[(-1)^k]$

$$+\frac{1}{3}Z[2^k]$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{z}{z+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{z-2}$$

$$=\frac{z^2-z}{z^2-z-2}\quad（由2°）$$

例3. $X(z)=\dfrac{z^2-z}{z^2+2z+2}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解 $X(z)=\dfrac{z^2+z}{(z+1)^2+1}$，按39°，有

$$Z^{-1}[X(z)]=(\sqrt{2})^k\left\{\sqrt{2}\sin\left[(k+1)\frac{3\pi}{4}\right]\right.$$

$$\left.+\sin\frac{3k\pi}{4}\right\}=(\sqrt{2})^k\cos\frac{3k\pi}{4}$$

验证 按14°，可有

$$Z\left[(\sqrt{2})^k\cos\frac{3k\pi}{4}\right]=\frac{z[z-\sqrt{2}\cos(3\pi/4)]}{z^2-2\sqrt{2}z\cos(3\pi/4)+2}$$

$$=\frac{z(z+1)}{z^2+2z+2}$$

例4. $X(z)=\dfrac{z^3-z^2}{(z+1)^2(z-2)}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解 按41°，可有

$$Z^{-1}[X(z)]=-\frac{1}{3}[(k+2)(-1)^{k+1}-(k+1)(-1)^k]$$

$$-\frac{1}{9}[(-1)^{k+2}-2^{k+2}-\{(-1)^{k+1}-2^{k+1}\}]$$

$$=\frac{1}{3}(-1)^k(2k+3)-\frac{1}{9}[2(-1)^k-2^{k+1}]$$

$$=\frac{1}{9}(6k+7)(-1)^k+\frac{2}{9}\cdot 2^k$$

验证 按2°及4°，可有

$$Z\left[\frac{1}{9}(6k+7)(-1)^k+\frac{2}{9}\cdot 2^k\right]$$

$$=\frac{6}{9}Z[k(-1)^k]+\frac{7}{9}Z[(-1)^k]+\frac{2}{9}Z[2^k]$$

$$=\frac{1}{9}\left\{-\frac{6z}{(z+1)^2}+\frac{7z}{z+1}+\frac{2z}{z-2}\right\}$$

$$=\frac{z^2-z}{(z+1)^2(z-2)}$$

例5. $X(z)=\dfrac{z^3+2z}{(z-1)(z+1)(z-2)}$，

求$Z^{-1}[X(z)]$

解　按42°，可有

$$Z^{-1}[X(z)]=\frac{3}{-2}+\frac{(-1)^{k+2}+2(-1)^{k+1}}{6}+\frac{2^{k+2}+2\cdot 2^{k+1}}{3}$$

$$=-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{8}{3}\cdot 2^k$$

读者试用2°验证这结果。

例6. $X(z)=\dfrac{z^3+2z^2}{(z^2+2z+2)(z-1)}$，

求$Z^{-1}[X(z)]$

解　按43°，可有

$$Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{5}(\sqrt{2})^{k+1}\left\{2\sin\left[(k+1)\frac{3\pi}{4}\right]+2\sqrt{2}\sin\frac{3k\pi}{4}\right\}$$

$$-\frac{1}{5}(\sqrt{2})^k\left\{2\sin\left[(k+2)\frac{3\pi}{4}\right]+2\sqrt{2}\sin\left[(k+1)\frac{3\pi}{4}\right]\right\}+\frac{3}{5}$$

$$=\frac{1}{5}(\sqrt{2})^{k+1}\left\{-\sqrt{2}\sin\frac{3k\pi}{4}+\sqrt{2}\cos\frac{3k\pi}{4}+2\sqrt{2}\sin\frac{3k\pi}{4}\right\}-$$

$$-\frac{1}{5}(\sqrt{2})^k\left\{-2\cos\frac{3k\pi}{4}-2\sin\frac{3k\pi}{4}+2\cos\frac{3k\pi}{4}\right\}+\frac{3}{5}$$

$$=\frac{2}{5}(\sqrt{2})^k\left(\cos\frac{3k\pi}{4}+2\sin\frac{3k\pi}{4}\right)+\frac{3}{5}$$

由读者用14°及15°验证这结果。

例7. $X(z)=\dfrac{z^3+2z^2}{(z+1)^3}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解 按40°，可有

$$Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2}(k+2)(k+1)(-1)^k$$
$$+(k+1)k(-1)^{k-1}$$
$$=\frac{1}{2}(-1)^k(-k^2+k+2)$$

读者可用6°，4°，2°验此结果。

例8. $X(z)=\dfrac{z^4+2z^3}{(z+1)^4}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解 按44°，可有

$$Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{6}\{(k+3)(k+2)(k+1)(-1)^k$$
$$+2(k+2)(k+1)k(-1)^{k-1}\}$$
$$=\frac{1}{6}(-1)^k(-k^3+7k+6)$$

读者试用8°，4°，2°验证此结果。

例9. $X(z)=\dfrac{z^3+2z}{(z-1)^3(z+1)}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解　按45°，可有

$$Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{4}[(k+2)(k+1)+2k(k-1)]$$

$$-\frac{1}{4}[(k+2)+2k]$$

$$+\frac{1}{8}\{[1-(-1)^{k+2}]+2[1-(-1)^{k}]\}$$

$$=\frac{1}{8}(6k^{2}-4k+3)-\frac{3}{8}(-1)^{k}$$

读者试用5°，3°，1°，2°验证此结果。

例10.　$X(z)=\dfrac{z^{3}+2z}{(z^{2}-1)^{2}}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解　$X(z)=\dfrac{z^{3}+2z}{(z-1)^{2}(z+1)^{2}}$，按46°，可有

$$Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{4}\{(k+2)[1+(-1)^{k+1}]$$

$$+2k[1+(-1)^{k-1}]\}$$

$$-2\frac{1}{8}\{[1-(-1)^{k+2}]+2[1-(-1)^{k}]\}$$

$$=\frac{1}{4}(3k-1)-\frac{3}{4}k(-1)^{k}+\frac{1}{4}(-1)^{k}$$

由读者用1°，2°，3°，4°验证此结果

例11.　$X(z)=\dfrac{z^{3}+2z}{(z-1)^{2}(z+1)(z-2)}$，

求$Z^{-1}[X(z)]$

解　按47°，可有

$$Z^{-1}[X(z)] = \frac{(k+2)+2k}{-2} - \frac{3}{4} + \frac{(-1)^{k+2}+2(-1)^k}{-12} + \frac{2^{k+2}+2\cdot 2^k}{3}$$

$$= -\frac{3}{2}k - \frac{7}{4} - \frac{1}{4}(-1)^k + 2\cdot 2^k$$

例12.　$X(z) = \dfrac{z^3+2z}{(z^2+2z+2)^2}$，求$Z^{-1}[X(z)]$

解　按49°，$a=0$，$b=1$，$c=0$，$d=2$，$\alpha=-1$，

$\beta=1$，$\rho=\sqrt{2}$，$\varphi=3\pi/4$，

$$Z^{-1}[X(z)] = -\frac{1}{2}(\sqrt{2})^{k-1}\left\{2(k+2)\cos\left[(k+1)\frac{3\pi}{4}\right] + 2k\cos\left[(k-1)\frac{3\pi}{4}\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{2}(\sqrt{2})^k\left\{2\sin\left[(k+2)\frac{3\pi}{4}\right] + 2\sin\frac{3k\pi}{4}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{2})^{k-1}\left\{-2\sqrt{2}\,k\cos\frac{3k\pi}{4} - 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3k\pi}{4} + \sin\frac{3k\pi}{4}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{2}(\sqrt{2})^k\left\{-2\cos\frac{3k\pi}{4} + 2\sin\frac{3k\pi}{4}\right\}$$

$$= (\sqrt{2})^k\left(k\cos\frac{3k\pi}{4}+2\sin\frac{3k\pi}{4}\right)$$

验证：由24°，15°，可有

$$Z\left[(\sqrt{2})^k\left(k\cos\frac{3k\pi}{4}+2\sin\frac{3k\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{-z(z^2+2)-4z^2}{(z^2+2z+2)^2}+\frac{2z}{z^2+2z+2}$$

$$=\frac{z^3+2z}{(z^2+2z+2)^2}$$

例13. $X(z)=\dfrac{z^3+2z}{(z^2+2z+2)(z-1)^2}$，

求$Z^{-1}[X(z)]$

解　按50°，$a=0$，$b=1$，$c=0$，$d=2$，

$\alpha=-1$，$\beta=1$，$\gamma=1$，$\rho=\sqrt{2}$，$\varphi=3\pi/4$．

$$Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{25}(\sqrt{2})^{k+2}\left\{2\sin\frac{3k\pi}{4}\right.$$

$$\left.+2\sin\left[(k-2)\frac{3\pi}{4}\right]\right\}$$

$$-\frac{2}{25}(\sqrt{2})^{k+1}\left\{2\sin\left[(k+1)\frac{3\pi}{4}\right]\right.$$

$$\left.+2\sin\left[(k-1)\frac{3\pi}{4}\right]\right\}$$

$$+\frac{1}{25}(\sqrt{2})^{k}\left\{2\sin\left[(k+2)\frac{3\pi}{4}\right]\right.$$

$$\left.+2\sin\frac{3k\pi}{4}\right\}+\frac{1}{5}(k+2+2k)-4\cdot\frac{3}{25}$$

$$=\frac{1}{25}(\sqrt{2})^k\left(4\sin\frac{3k\pi}{4}+4\cos\frac{3k\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{2}{25}(\sqrt{2})^k\left(4\sin\frac{3k\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{25}(\sqrt{2})^k\left(-2\cos\frac{3k\pi}{4}+2\sin\frac{3k\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{25}(15k-2)$$

$$=\frac{2}{25}(\sqrt{2})^k\left(7\sin\frac{3k\pi}{4}+\cos\frac{3k\pi}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{25}(15k-2)$$

验证：按14°，15°，3°，1°，可有

$$Z\left[\frac{2}{25}(\sqrt{2})^k\left(7\sin\frac{3k\pi}{4}+\cos\frac{3k\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{15}(15k-2)\right]$$

$$=\frac{2}{25}\left\{\frac{7z}{z^2+2z+2}+\frac{z(z+1)}{z^2 2z+2}\right\}$$

$$+\frac{15}{25}\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{2}{25}\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{z}{25}\left\{\frac{16+2z}{z^2+2z+2}+\frac{-2z+17}{(z-1)^2}\right\}$$

$$=\frac{z(z^2+2)}{(z^2+2z+2)(z-1)^2}$$

§ 11 用Z变换解不带右端项的常系数线性差分方程

先考察一阶差分方程

$$x(kT+T)+a\,x(kT)=0 \qquad (11.1)$$

其中 a 为常数（与 k 无关）。两端取 z 变换，有

$$Z[x(kT+T)]+aZ[x(kT)]=0 \qquad (11.2)$$

写 $Z[x(kT)]=X(z)$，则由§5性质（三）的第二条，有

$$Z[x(kT+T)]=z[X(z)-x(0)]$$

代入(11.2)，可得

$$z[X(z)-x(0)]+a\,X(z)=0$$

由此解得

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z+a}$$

按表36°，即得 $x(kT)=x(0)(-a)^k$

$$\left(a=0\text{ 应有}(-a)^k=\begin{cases}1,\text{在}k=0\\0,\text{在}k=1,2,3\cdots\end{cases}\right)$$

由于 $x(0)$ 可为任意值，改写 $C=x(0)$ 可得解

$$x(kT)=C(-a)^k$$

由 C 的任意性，这包括原给方程的全部解。称此为所考察的一阶差分方程(11.1)的通解。

再看不带右端项的二阶常系数线性差分方程

$$x(kT+2T)+a\,x(kT+T)+b\,x(kT)=0 \qquad (11.3)$$

其中a及b为常数（与k无关）。取z变换，并用§5性质(三)的第二式，可有

$$z^2[X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}]+az[X(z)-x(0)]+bX(z)=0$$

$$(z^2+az+b)X(z)=x(0)z^2+[x(T)+ax(0)]z$$

$$X(z)=\frac{x(0)z^2+[x(T)+ax(0)]z}{z^2+az+b} \tag{11.3'}$$

(i)设$z^2+az+b=0$有两个不等根α，β，则可有

$$X(z)=\frac{x(0)z^2+[x(T)+ax(0)]z}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

查续表38°，可得(11.3)的解：

$$x(kT)=\frac{x(0)(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})+[x(T)+ax(0)](\alpha^k-\beta^k)}{\alpha-\beta} \tag{11.4}$$

此为带初始条件$x(0)$及$x(T)$之解。(11.4)可写成

$$x(kT)=\frac{x(T)+x(0)(\alpha+a)}{\alpha-\beta}\alpha^k-\frac{x(T)+x(0)(\beta+a)}{\alpha-\beta}\beta^k$$

由于$x(0)$及$x(T)$可为任意值，且$\alpha\neq\beta$，我们可改写

$$C_1=\frac{x(T)+x(0)(\alpha+a)}{\alpha-\beta}$$

$$C_2=-\frac{x(T)+x(0)(\beta+a)}{\alpha-\beta}$$

从而得(11.3)的解，即$x(kT+2T)-(\alpha+\beta)x(kT+T)+\alpha\beta x(kT)=0$之解为：

$$x(kT)=C_1\alpha^k+C_2\beta^k \tag{11.5}$$

其中C_1及C_2为任意常数。由于此包括(11.3)的全部解，称(11.5)为(11.3)的通解。

$$\left(\text{如果}\beta=0,\text{须取}\beta^k=\begin{cases}1, & \text{在 } k=0\\0, & \text{在 } k=1,2,3,\cdots\end{cases}\right)$$

(ii)设$z^2+az+b=0$二根为共轭复根：①

$$\alpha\pm j\beta=\rho(\cos\varphi\pm j\sin\varphi)$$

则 $$X(z)=\frac{x(0)z^2+[x(T)+ax(0)]z}{(z-\alpha)^2+\beta^2}$$

查续表39°可得(11.3)的解，即

$$x(kT+2T)-2\alpha x(kT+T)+(\alpha^2+\beta^2)x(kT)=0$$

的解：

$$x(kT)=\frac{1}{\beta}\rho^k\{x(0)\rho\sin(k+1)\varphi+[x(T)+ax(0)]\sin k\varphi\} \tag{11.6}$$

其中 $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，$\mathrm{cso}\varphi=\alpha/\rho$，$\sin\varphi=\beta/\rho$ 此为带初始值$x(0)$及$x(T)$的解。显然，(11.6)可写成

$$x(kT)=\rho^k(C_1\cos k\varphi+C_2\sin k\varphi) \tag{11.7}$$

其中C_1及C_2为任意常数，此为通解。

(iii)设$z^2+az+b=0$有两等根α，α，则

$$X(z)=\frac{x(0)z^2+[x(T)+ax(0)]z}{(z-\alpha)^2}$$

查续表37°得(11.3)的解，即

$$x(kT+2T)-2\alpha x(kT+T)+\alpha^2x(kT)=0$$

---

①不要把（ii）中的α,β和（ i ）中的α,β相混

的解：$x(kT)=x(0)(k+1)\alpha^k+[x(T)+\alpha x(0)]k\alpha^{k-1}$

$$(11.8)$$

其中在 $\alpha=0$ 时，须取 $\alpha^k=\begin{cases}1, 在\ k=0\\0, 在\ k=1,2,3,\cdots\end{cases}$

又 $a=-2\alpha$ 解(11.8)是带初始值 $x(0)$ 及 $x(T)$ 的解。显然(11.8)可写成

$$x(kT)=\alpha^k(C_1+C_2k) \qquad (11.9)$$

而 C_1 及 C_2 与 K 无关；此为通解。

带有初始值 $x(0)$，$x(T)$ 的解：(11.4)，(11.6)，(11.8)形式较繁，不必作为公式强记，可用 z 变换解得。至于通解(11.5)，(11.7)，(11.9)形式较简捷，可按方程

$$r^2+ar+b=0$$

的根：(i)，α,β，(ii) $\rho(\cos\varphi\pm j\sin\varphi)$，(iii) α，α，直接写出。这些通解的结构类似于微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$$

的通解的结构。

如果不用 z 变换，则可用试验法先求(11.3)的通解，然后再求具初始值 $x(0)$，$x(T)$ 的解。用试验法求通解要用到解的线性性质，即：如果 $x(kT)$ 为(11.3)的解，则 $Cx(kT)$ 也是(11.3)的解（c 为常数)；又如果 $x_1(kT)$ 及 $x_2(kT)$ 均为(11.3)的解，则 $(x_1+x_2)(kT)\equiv x_1(kT)+x_2(kT)$ 也是(11.3)的解。这两条性质证明较易，留给读者自己去完成。所谓试验法乃是设(11.3)有如 r^k 形式的解，r 为待定常数。以 r^k 代(11.3)的 $x(kT)$，可有 $r^{k+2}+ar^{k+1}+br^k=0$，即

$$r^k(r^2+ar+b)=0$$

称 $$r^2+ar+b=0 \tag{11.10}$$

为辅助方程。

若(11.10)有两不等根，$\alpha \neq \beta$，则α^k及β^k均为(11.3)的解 由解的线性性质，可见

$$x(kT)=C_1\alpha^k+C_2\beta^k$$

为(11.3)的解。此与(11.5)相同，即为通解。注意，如果两根中有一根为0，例如$\beta=0$（当然$\alpha\neq0$），那末应

取 $$\beta^k=\begin{cases}1, 在\ k=0\\0, 在\ k=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

若(11.10)有两共轭复根$\rho e^{\pm i\varphi}$，则$\rho^k e^{\pm ik\varphi}$均为(11.3)的解，故由解的线性性质，可见

$$\frac{1}{2}\rho^k(e^{ik\varphi}+e^{-jk\varphi})=\rho^k\cos k\varphi$$

及 $$\frac{1}{2j}\rho^k(e^{jk\varphi}-e^{-jk\varphi})=\rho^k\sin k\varphi$$

均为(11.3)的解，从而

$$x(kT)=\rho^k(C_1\cos k\varphi+C_2\sin k\varphi)$$

为(11.3)的解，此与(11.7)同，故为通解。

如果(11.10)有两等根α,α,则α^k及$(\alpha+h)^k\big|_{h=0}$为(11.3)的解，由线性性质，可见

$$\alpha\left.\frac{(\alpha+h)^k-\alpha^k}{h}\right|_{h=0}=k\alpha^k$$

为(11.3)的解，故按线性性质，可见

$$x(kT)=C_1\alpha^k+C_2k\alpha^k=\alpha^k(C_1+C_2k)$$

为(11.3)的解。此与(11.9)相同，故为通解。但应注意在

$\alpha=0$时，须取$\alpha^k=\begin{cases}1, 在\ k=0\\0, 在\ k=1,2,3,\cdots\end{cases}$

有了通解，具有初始值$x(0)=x_0$及$x(T)=x_1$的解可由下法得出。即以$k=0$，$x(kT)=x_0$；$k=1$，$x(kT)=x_1$两条件分别代入通解，得两个以C_1、C_2为未知数的一次方程，解出C_1、C_2再代回通解，即得所要求的解。

最后讨论不带右端项的n阶常系数线性差分方程：

$$a_0x(kT+nT)+a_1x(kT+nT-T)+\cdots+a_{n-1}x(kT+T)+a_nx(kT)=0 \qquad (11.11)$$

我们兼用z变换及试验法解此方程。

施用z变换于(11.11)的各项，可有

$$\left.\begin{aligned}&a_0z^n\{X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}-\cdots-x(nT-T)z^{-n+1}\}\\&+a_1z^{n-1}\{X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}-\cdots-x(nT-2T)z^{-n+2}\}\\&+\cdots\cdots\\&+a_{n-2}z^2\{X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}\}\\&+a_{n-1}z\{X(z)-x(0)\}+a_nX(z)\end{aligned}\right\}=0$$

即

$$(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n)X(z)=b_1z^n+b_2z^{n-1}+\cdots+bn^z,$$

$$X(z)=\frac{b_1z^n+b_2z^{n-1}+\cdots+b_nz}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \qquad (11.12)$$

其中 $b_1=a_0x(0)$

$b_2=a_0x(T)+a_1x(0)$

$b_3=a_0x(2T)+a_1x(T)+a_2x(0)$

……………………………………

$b_{n-1}=a_0x(nT-2T)+a_1x(nT-3T)+\cdots+a_{n-2}x(0)$

$$b_n = a_0 x(nT-T) + a_1 x(nT-2T) + \cdots + a_{n-1} x(0)$$

用留数法，或把$X(z)/z$分为部分分式然后查表，或把$X(z)$展为z^{-1}的幂级数，求出（11.12）的反z变换，即得具初始值$x(0)$，$x(T)$，…，$x(nT-T)$的解。注意$b_1, b_2, \cdots, b_n$是$x(0)$，$x(T)$，…，$x(nT-T)$的线性合并。

我们考虑一个特殊情形，即(11.12)分母的n个零点全不相等，设为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。为简单起见，取$a_0=1$，则

$$X(z) = \frac{b_1 z^n + b_2 z^{n-1} + \cdots + b_n z}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}$$

（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$彼此不等）

分为部分分式，可有

$$X(z) = \frac{C_1 z}{z-\alpha_1} + \frac{C_2 z}{z-\alpha_2} + \cdots + \frac{C_n z}{z-\alpha}$$

其中

$$C_1 = \frac{b_1 \alpha_1^{n-1} + b_2 \alpha_1^{n-2} + \cdots + b_n}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$C_2 = \frac{b_1 \alpha_2^{n-1} + b_2 \alpha_2^{n-2} + \cdots + b_n}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

…………………………………………

$$C_n = \frac{b_1 \alpha_n^{n-1} + b_2 \alpha_n^{n-2} + \cdots + b_n}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

取$X(z)$的反z变换，可有解

$$x(kT) = C_1 \alpha_1^k + C_2 \alpha_2^k + \cdots + C_n \alpha_n^k \qquad (11.13)$$

注意：如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$中有一个为0，例如$\alpha_1=0$（其他当然均不为0），我们应取 $\alpha_1^k = \begin{cases} 1, 在\ k=0 \\ 0, 在\ k=1,2,3,\cdots \end{cases}$

我们再考虑另一个特殊情形，即(11.12)分母的n个根全

相等为 a。仍取 $a_0=1$，则

$$X(z)=\frac{b_1 z^n+b_2 z^{n-1}+\cdots+b_n z}{(z-a)^n}$$

所求之解为

$$x(kT)=\underset{a}{\text{res}}\{z^{k-1}X(z)\}$$

$$=\underset{a}{\text{res}}\frac{b_1 z^{k+n-1}+b_2 z^{k+n-2}+\cdots+b_n z^k}{(z-a)^n}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(b_1 z^{k+n-1}+b_2 z^{k+n-2}+\cdots\cdots+b_n z^k)\right]_{z=a}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\{b_1(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+1)a^k$$

$$+b_2(k+n-2)(k+n-3)\cdots k a^{k-1}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+b_n k(k-1)\cdots(k-n+2)a^{k-n+1}\}$$

花括号中每项均有 $(n-1)$ 个 k 的一次式因子，作出这些乘积，并按 k 的升幂排列，并假定 $a\neq 0$，可见上式能化成下列形式

$$x(kT)=a^k(C_1+C_2 k+\cdots+C_n k^{n-1}) \tag{11.14}$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 与 k 无关，它们是 b_1，$b_2,\cdots,b_n$，的线性合并，因而是 $x(0)$，$x(T)$，$\cdots$，$x(nT-T)$ 的线性合并。(11.14)即为所求之解。不要把(11.14)中的 $C_1,\cdots,C_n$ 和(11.13)中的 $C_1,\cdots,C_n$ 相混淆。注意(11.13)及(11.14)既是具有初始值 $x(0)$，$x(T)$，$\cdots$，$x(nT-T)$ 的解，也是通解。

如果 $a=0$，则原差分方程成为 $x(kT+nT)=0$，并且

$$X(z)=\frac{b_1z^n+b_2z^{n-1}+\cdots+b_nz}{z^n}$$

$$=b_1+\frac{b_2}{z}+\frac{b_3}{z^2}+\cdots+\frac{b_n}{z^{n-1}}$$

故$x(kT)=Z^{-1}[X(z)]$

$=X(z)$的负幂级数展式中z^{-k}的系数

$$=\begin{cases}b_1, 在\ k=0\\ b_2, 在\ k=1\\ b_3, 在\ k=2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_n, 在\ k=n-1\\ 0, 在\ k\geqslant n\end{cases}$$

此$x(kT)$即为$x(kT+nT)=0$的解。注意在此特殊情形下，$b_1, b_2, \cdots, b_n$分别化为$x(0), x(T), \cdots, x(nT-T)$。

为了得出(11.11)的通解，用试验法更方便。设(11.11)有如r^k形式之解，r为常数。以r^k代(11.11)中的$x(kT)$，从而以$r^{k+1}, \cdots, r^{k+n}$分别代(11.11)中的$x(kT+T), \cdots, x(kT+nT)$，消去$r^k$，可得

$$a_0r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0 \qquad (11.15)$$

称此为辅助方程。对于(11.15)的一个单根α，可有(11.11)的解$C\alpha^k$。若$\alpha=0$，则应有$\alpha^k=\begin{cases}1, 在\ k=0\\ 0, 在\ k\geqslant 1\end{cases}$

对于(11.15)的一对不重复的共轭复根$\rho e^{\pm j\varphi}$，可有(11.11)的解：$\rho^k(C_1\cos k\varphi+C_2\sin k\varphi)$。

对于(11.15)的二重根α, α，除$C_1\alpha^k$为(11.11)的解外，$\{\alpha[(\alpha+h)^k-\alpha^k]/h\}|_{h=0}=k\alpha^k$亦应为(11.11)的解，从而

(11.11)必有解$a^k(C_1+C_2k)$。

对于(11.15)的三重根a, a, a，除a^k，ka^k为(11.11)的解外，我们还能证k^2a^k也是(11.11)的解。事实上，把第一、第二两a当作二重根，我们有解ka^k，而把第一、第三两a作为二重根，我们应有解$k(a+h)^k$（其中$h=0$），故在a为三重根的情况下，我们应有(11.11)的解

$$a\frac{k(a+h)^k-ka^k}{h}\Bigg|_{h=0}=k^2a^k$$

所以在a为三重根时，(11.11)有解$a^k(C_1+C_2k+C^3k^2)$。依此下推，…，结果与(11.14)一致。

若(11.15)有一对二重共轭复根$\rho e^{\pm i\varphi}$，$\rho e^{\pm i\varphi}$，则

$$\rho^k[(C_1+C_2k)\cos k\varphi+(C_3+C_4k)\sin k\varphi]$$

为(11.11)的解。

把相应于(11.15)的各不同根的解加起来，即得通解（共有n个任意常数）。

有了通解，满足初始条件

$$x(0)=x_0,\quad x(T)=x_1,\quad x(2T)=x_2,\cdots,x(nT-T)=x_{n-1}$$

的特解可由下法得出。即把此条件代入通解中，我们可有一组n个以n个任意常数为未知数的一次方程，解出这些常数，再代回通解，即得所要求的特解。

下面我们举几个数字例子。

例1. $x(kT+2T)+3x(kT+T)+2x(kT)=0$

$$x(0)=1\qquad x(T)=2$$

求特解。

解　运用z变换于原给方程的每一项，可有

$$Z[x(kT+2T)]+3Z[x(kT+T)]+2Z[x(kT)]=0$$

即　$z^2[X(z)-1-2z^{-1}]+3z[X(z)-1]+2X(z)=0$

由此得

$$X(z)=\frac{z^2+5z}{z^2+3z+2}=\frac{z^2+5z}{(z+1)(z+2)}$$

查续表38°得反 z 变换

$$x(kT)=(-1)^{k+1}-(-2)^{k+1}+5(-1)^k-5(-2)^k$$

$=4(-1)^k-3(-2)^k$　即为所要求的解。

另解。辅助方程为$r^2+3r+2=0$，两根为-1，-2，故通解为　$x(kT)=C_1(-1)^k+C_2(-2)^k$

$x(0)=1$　则　$1=C_1+C_2$

$x(T)=2$　则　$2=-C_1-2C_2$

由此解得$C_1=4$，$C_2=-3$，所求特解为

$x(kT)=4(-1)^k-3(-2)^k$　同上。

例2.　$x(kT+2T)+4x(kT+T)+4x(kT)=0$

$x(0)=1$　$x(T)=2$　求特解

解　取 z 变换，可有

$$z^2[X(x)-1-2z^{-1}]+4z[X(z)-1]+4X(z)=0$$

即　$(z^2+4z+4)X(z)=z^2+6z$

于是　$X(z)=\dfrac{z^2+6z}{(z+2)^2}$

查续表37°，$x(kT)=(k+1)(-2)^k+6k(-2)^{k-1}$

即　$x(kT)=(-2)^k(-2k+1)$　即为所求。

另解，辅助方程为$r^2+4r+4=0$，两根相等为-2，-2故通解为$x(kT)=(-2)^k(C_1+C_2k)$。以$x(0)=1$，$x(T)=2$代入之，可有$1=C_1$，$2=-2(C_1+C_2)$，由此解出$C_1=1$，$C_2=-2$，特解为$x(kT)=(-2)^k(1-2k)$

例3. $x(kT+2T)+4x(kT+T)+5x(kT)=0$

$x(0)=1, x(T)=2$，求特解。

解 取 z 变换，可有

$$z^2[X(z)-1-2z^{-1}]+4z[X(z)-1]+5X(z)=0$$

$$X(z)=\frac{z^2+6z}{z^2+4z+5}=\frac{z^2+6z}{(z+2)^2+1}$$

查续表39°，$x(kT)=(\sqrt{5})^k[\sqrt{5}\sin(k+1)\varphi+6\sin k\varphi]$

其中$\cos\varphi=-2/\sqrt{5}$，$\sin\varphi=1/\sqrt{5}$，$\varphi=\pi-\operatorname{arctg}(1/2)$

上式易化成

$$x(kT)=(\sqrt{5})^k\left\{\sqrt{5}\left[\sin k\varphi\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos k\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]+6\sin k\varphi\right\}=(\sqrt{5})^k(\cos k\varphi+4\sin k\varphi)$$

即为所求。

另解 辅助方程为$r^2+4r+5=0$，两根为$-2\pm j=\sqrt{5}$ $(\cos\varphi\pm j\sin\varphi)$

其中 $\cos\varphi=-2/\sqrt{5}$，$\sin\varphi=1/\sqrt{5}$，$\varphi=\pi-\operatorname{arctg}(1/2)$

通解为$x(kT)=(\sqrt{5})^k(C_1\cos k\varphi+C_2\sin k\varphi)$

$x(0)=1$，则 $1=C_1$

$x(T)=2$，则 $2=\sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}C_1+\frac{1}{\sqrt{5}}C_2\right)$

于是 $C_1=1$，$C_2=4$ 特解为

$$x(kT)=(\sqrt{5})^k(\cos k\varphi+4\sin k\varphi)$$

例4. $x(kT+4T)+4x(kT+3T)+6x(kT+2T)$

$+4x(kT+T)+x(kT)=0$ 求通解。

解　辅相方程为$r^4+4r^3+6r^2+4r+1=0$　即$(r+1)^4=0$，四根相等为$-1,-1,-1,-1$　通解为

$$x(kT)=(-1)^k(C_1+C_2k+C_3k^2+C_4k^3)$$

用z变换，须查续表44°。

例5.　$x(kT+3T)+x(kT+2T)+x(kT+T)+x(kT)=0$

$x(0)=1$，$x(T)=2$，$x(2T)=3$　求特解

解　取z变换，可有

$$z^3[X(z)-1-2z^{-1}-3z^{-2}]$$
$$+z^2[X(z)-1-2z^{-1}]$$
$$+z[X(z)-1]+X(z)=0$$
$$(z^3+z^2+z+1)X(z)=z^3+3z^2+6z$$
$$X(z)=\frac{z^3+3z^2+6z}{(z^2+1)(z+1)}$$

查续表43°，

$$x(kT)=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+3\sin\frac{k\pi}{2}\right.$$
$$\left.+6\sin\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.+3\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+6\sin\frac{k\pi}{2}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}(-1)^k(1-3+6)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{k\pi}{2}+3\sin\frac{k\pi}{2}-6\cos\frac{k\pi}{2}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{-\sin\frac{k\pi}{2}+3\cos\frac{k\pi}{2}+6\sin\frac{k\pi}{2}\right\}$$

$$+2(-1)^k$$

$$=2(-1)^k+4\sin\frac{k\pi}{2}-\cos\frac{k\pi}{2}\quad \text{即为所求。}$$

另解　辅助方程为$r^3+r^2+r+1=0$，即

$(r+1)(r^2+1)=0$，三根为-1，　$\pm j=\cos\frac{\pi}{2}\pm j\sin\frac{\pi}{2}$

通解为

$$x(kT)=C_1(-1)^k+C_2\cos\frac{k\pi}{2}+C_3\sin\frac{k\pi}{2}$$

求特解。

$x(0)=1$　　则　$1=C_1+C_2$

$x(T)=2$　　则　$2=-C_1+C_3$

$x(2T)=3$　　则　$3=C_1-C_2$

由此解得$C_1=2, C_2=-1, C_3=4$　特解为

$$x(kT)=2(-1)^k-\cos\frac{k\pi}{2}+4\sin\frac{k\pi}{2}$$

例6.　$x(kT+3T)+x(kT)=0$

$x(0)=1, x(T)=2, x(2T)=3$　求特解。

解　取z变换，可有

$$z^3[X(z)-1-2z^{-1}-3z^{-2}]+X(z)=0$$

$$X(z)=\frac{z^3+2z^2+3z}{z^3+1}=\frac{z^3+2z^2+3z}{(z+1)(z^2-z+1)}$$

查续表43°，可有

$$x(kT)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3}\Big[\sin\Big(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\Big)+2\sin\frac{k\pi}{3}$$

$$+3\sin\Big(\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\Big)\Big]$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3}\Big[\sin\Big(\frac{k\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\Big)$$

$$+2\sin\Big(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\Big)+3\sin\frac{k\pi}{3}\Big]$$

$$+\frac{1}{3}(-1)^k(1-2+3)$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3}}\Big[\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3}$$

$$+2\sin\frac{k\pi}{3}+3\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3}$$

$$+2\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3}\Big)+3\sin\frac{k\pi}{3}\Big]$$

$$+\frac{2}{3}(-1)^k$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(\frac{15}{2}\sin\frac{k\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{k\pi}{3}\Big)$$

$$+\frac{2}{3}(-1)^k$$

$$=\frac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{k\pi}{3}+\frac{2}{3}(-1)^k$$

另解．辅助方程为$r^3+1=0$，即

$$(r+1)(r^2-r+1)=0$$

三根为$\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm j\sin\frac{\pi}{3}$，$-1$

通解为$x(kT)=C_1(-1)^k+C_2\cos\frac{k\pi}{3}+C_3\sin\frac{k\pi}{3}$

$x(0)=1$，则 $1=C_1+C_2$

$x(T)=2$，则 $2=-C_1+\frac{1}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3$

$x(2T)=3$，则 $3=C_1-\frac{1}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3$

由此解出$C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=\frac{1}{3}$，$C_3=\frac{5}{\sqrt{3}}$

特解为 $x(kT)=\frac{2}{3}(-1)^k+\frac{1}{3}\cos\frac{k\pi}{3}+\frac{5}{\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3}$

例7 $x(kT+3T)-2x(kT+2T)-4x(kT+T)+8x(kT)=0$

$x(0)=1, x(T)=-1, x(2T)=2$ 求特解。

解 取z变换，有

$$z^3[X(z)-1+z^{-1}-2z^{-2}]-2z^2[X(z)-1+z^{-1}]-4z[X(z)-1]+8X(z)=0$$

即 $(z^3-2z^2-4z+8)X(z)=z^3-3z^2$

$$X(z)=\frac{z^3-3z^2}{z^3-2z^2-4z+8}=\frac{z^3-3z^2}{(z-2)^2(z+2)}$$

查续表41°，可得

$$x(kT)=\frac{1}{4}[(k+2)2^{k+1}-3(k+1)2^k]$$

$$-\frac{1}{16}\{[2^{k+2}-(-2)^{k+2}]-3[2^{k+1}$$

$$-(-2)^{k+1}]\}$$

$$=\frac{1}{4}(-k\cdot 2^k+2^k)-\frac{1}{16}\{-2\times 2^k-10(-2)^k\}$$

$$=-\frac{1}{4}k\cdot 2^k+\frac{3}{8}\cdot 2^k+\frac{5}{8}(-2)^k$$

另解 辅助方程为

$$r^3-2r^2-4r+8=0$$

即 $(r-2)^2(r+2)=0$

三根为2,2,−2 通解为

$$x(kT)=C_1(-2)^k+2^k(C_2+C_3k)$$

$x(0)=1$ 则 $1=C_1+C_2$

$x(T)=-1$ 则 $-1=-2C_1+2C_2+2C_3$

$x(2T)=2$ 则 $2=4C_1+4C_2+8C_3$

由此解出 $C_1=\frac{5}{8}$, $C_2=\frac{3}{8}$, $C_3=-\frac{1}{4}$

特解为 $x(kT)=\frac{5}{8}(-2)^k+\frac{3}{8}2^k-\frac{1}{4}k\cdot 2^k$

例8. $x(kT+4T)+x(kT+3T)+x(kT+T)$
$+x(kT)=0$

$x(0)=1$，$x(T)=2$，$x(2T)=-1$，$x(3T)=3$，求特解。

解 取 z 变换，可有

$$z^4[X(z)-1-2z^{-1}+z^{-2}-3z^{-3}]$$
$$+z^3[X(z)-1-2z^{-1}+z^{-2}]$$
$$+z[X(z)-1]+X(z)=0$$

即 $$(z^4+z^3+z+1)X(z)=z^4+3z^3+z^2+3z$$

由此得

$$X(z)=\frac{z^4+3z^3+z^2+3z}{z^4+z^3+z+1}=\frac{z^4+3z^3+z^2+3z}{(z^2-z+1)(z+1)^2}$$

查续表50°，$a=1, b=3, c=1, d=3, \alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\gamma=-1, \rho=1, \varphi=\pi/3, (\gamma-\alpha)^2+\beta^2=3$，

$$x(kT)=\frac{2}{9\sqrt{3}}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\frac{k\pi}{3}\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$+\frac{4}{9\sqrt{3}}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)+3\sin\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\sin\frac{k\pi}{3}+3\sin\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$+\frac{2}{9\sqrt{3}}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{3}+\pi\right)+3\sin\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)+3\sin\frac{k\pi}{3}\right]$$
$$+\frac{1}{3}(-1)^k[(k+3)-3(k+2)+(k+1)-3k]$$

$$+2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}(-1)^k[-1+3-1+3]$$

$$=\frac{7}{3\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{k\pi}{3}$$

$$+\frac{1}{3}(-1)^k(2-4k)$$

即为所求。化简时用到两角和差的正弦公式。

另解，辅助方程为$r^4+r^3+r+1=0$

即 $(r^3+1)(r+1)=0$，亦即$(r^2-r+1)(r+1)^2=0$

四根为 $\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm j\sin\frac{\pi}{3}$，$-1$，$-1$

故通解为 $x(kT)=(-1)^k(C_1+C_2k)+C_3\cos\frac{k\pi}{3}$

$$+C_4\sin\frac{k\pi}{3}$$

$x(0)=1$ 则 $1=C_1+C_3$

$x(T)=2$ 则 $2=-C_1-C_2+\frac{1}{2}C_3+\frac{\sqrt{3}}{2}C_4$

$x(2T)=-1$ 则 $-1=C_1+2C_2-\frac{1}{2}C_3+\frac{\sqrt{3}}{2}C_4$

$x(3T)=3$ 则 $3=-C_1-3C_2-C_3$

由此解得 $C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=-\frac{4}{3}$，$C_3=\frac{1}{3}$，$C_4=\frac{7}{3\sqrt{3}}$，

特解为 $x(kT)=(-1)^k\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}k\right)+\frac{1}{3}\cos\frac{k\pi}{3}$

$$+\frac{7}{3\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

§ 12　带右端项的一阶常系数线性差分方程的解

我们先解一阶方程

$$x(kT+T)+ax(kT)=f(kT) \qquad (12.1)$$

其中 a 为常数（对 k 来说），$f(kT)$为已知数列。

取 z 变换并利用§5性质（三）的第二式，有

$$z[X(z)-x(0)]+aX(z)=F(z) \qquad (12.2)$$

其中$X(z)=Z[x(kT)]$　$F(z)=Z[f(kT)]$

现(12.2)可化成

$$(z+a)X(z)=zx(0)+F(z)$$

由此得　$$X(z)=x(0)\frac{z}{x+a}+\frac{1}{z+a}F(z) \qquad (12.3)$$

由表2°，$\dfrac{z}{z+a}=Z[(-a)^k]$，又

$$\frac{1}{z+a}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+az^{-1}}=\frac{1}{z}(1-az^{-1}+a^2z^{-2}-\cdots+(-a)^{k-1}z^{-k+1}+\cdots)$$

$$=z^{-1}-az^{-2}+a^2z^{-3}-\cdots+(-a)^{k-1}z^{-k}+\cdots$$

故　$$Z^{-1}\left[\frac{1}{z+a}\right]=\begin{cases}(-a)^{k-1}, & 在\quad k\geqslant 1\\ 0, & 在\quad k=0\end{cases}$$

于是写　$$\varphi(kT)=\begin{cases}(-a)^{k-1}, & 在\quad k\geqslant 1\\ 0, & 在\quad k=0\end{cases} \qquad (12.4)$$

则 $\frac{1}{z+a} = Z[\varphi(kT)]$

注意：这结果也可直接从$\frac{z}{z+a} = Z[(-a)^k]$并应用§5性质（三）的第一式得出($n=1$)。

于是(12、3)可写成

$$X(z) = x(0)Z[(-a)^k] + Z[\varphi(kT)]Z[f(kT)] \tag{12.5}$$

根据§5性质(五)有

$$\begin{aligned} &Z[\varphi(kT)]Z[f(kT)] = Z[(\varphi * f)(kT)] \\ &= Z[\varphi(0)f(kT) + \varphi(T)f(kT-T) + \varphi(2T)f(kT-2T) \\ &\qquad + \cdots + \varphi(kT)f(0)] \\ &= Z[f(kT-T) - af(kT-2T) + \cdots + (-a)^{k-1}f(0)] \end{aligned}$$

代入(12.5)然后取反 z 变换，可得

$$x(kT) = x(0)(-a)^k + \{f(0)(-a)^{k-1} + f(T)(-a)^{k-2} + \cdots - af(kT-2T) + f(kT-T)\} \tag{12.6}$$

这就是所要求的解。根据 $x(0)$ 的任意性，(12.6)就是(12.1)的通解。(12.6)右端第一项$x(0)(-a)^k$是不带右端项的方程

$$x(kT+T) + ax(kT) = 0 \tag{12.7}$$

的通解，也称方程(12.1)的补函数。(12.6)右端括号中之式是(12.1)的一个特解，即

通解 = 补函数 + 特解

这对带右端项的高阶差分方程也成立。

方程(12.1)的解(12.6)也可由递推法得出如下

用递推法求补函数即求不带右端项的方程(12.7)的通解

在§2中已有例示，这里不再重复。我们来用递推法求(12.1)的特解。于(12.1)中令$k=0$,可有

$$x(T)+a\,x(0)=f(0)$$

即是所求特解。为简单起见,取$x(0)=0$，从而$x(T)=f(0)$

于(12.1)中取$k=1$,有$x(2T)+a\,x(T)=f(T)$

从而 $x(2T)=(-a)f(0)+f(T)$

再于(12.1)中令$k=2$,有$x(3T)+a\,x(2T)=f(2T)$

从而 $x(3T)=(-a)^2f(0)+(-a)f(T)+f(2T)$

依此下推，我们可归纳得

$$x(kT)=(-a)^{k-1}f(0)+(-a)^{k-2}f(T)+\cdots$$
$$+(-a)f(kT-2T)+f(kT-T)$$

现由(12.1)有

$$x(kT+T)=(-a)x(kT)+f(kT)$$

把所归纳出的$x(kT)$代入之，有

$$x(kT+T)=(-a)^kf(0)+(-a)^{k-1}f(T)+\cdots+$$
$$(-a)f(kT-T)+f(kT)$$

这和上面所归纳出的$x(kT)$形式相同，以$k+1$代k,归纳法即告完成。

在上面，我们用§5性质（五）得出乘积$\dfrac{1}{z+a}F(z)$的反z变换。但对于具体的函数$F(z)$亦可查表或用留数法或用负幂级数法直接求$F(z)/(z+a)$的反z变换以得特解。

我们举几个例子

例1．$x(kT+T)+a\,x(kT)=b$,a及b均为常数。

解 这里$f(kT)=b$,代入(12.6)得解

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+b\{(-a)^{k-1}+(-a)^{k-2}+\cdots+(-a)+1\}$$

若$a\neq-1$,则此可化成

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+b\frac{1-(-a)^k}{1+a}$$

$$=\left\{x(0)-\frac{b}{1+a}\right\}(-a)^k+\frac{b}{1+a}$$

$$=C(-a)^k+\frac{b}{1+a} \tag{12.8}$$

其中$C=x(0)-b/(1+a)$　若　$a=-1$　则有

$$x(kT)=x(0)+bk \tag{12.9}$$

如果不用(12.6)而直接按原方程取z变换，并注意$Z[b]=bz/(z-1)$　则(12.3)成为

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z+a}+\frac{bz}{(z-1)(z+a)}$$

若$a\neq-1$，则查续表36°及38°,取反z变换，可得解

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+\frac{b[1-(-a)^k]}{1+a}$$

$$=C(-a)^k+\frac{b}{1+a}$$

结果与(12.8)相同。

若$a=-1$，则$X(z)=x(0)\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{bz}{(z-1)^2}$

查续表36°，37°，得$x(kT)=x(0)+bk$，

结果与(12.9)相同。

我们看到，后面的方法有一个优点，就是不需要把一个

级数的k项之和化为封闭式。

例 2. $x(kT+T)+ax(kT)=kT$

解　这里$f(kT)=kT$　代入(12.6)得解

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+T\{(-a)^{k-2}+2(-a)^{k-3}+\cdots+(k-2)(-a)+(k-1)\} \tag{12.10}$$

我们按$a\neq-1$及$a=-1$两种情形把(12.10)右端花括号中的式子变为封闭式。若$a\neq-1$，则写

$$S=(k-1)+(k-2)(-a)+\cdots+2(-a)^{k-3}+(-a)^{k-2}$$

于是

$$(-a)S=(k-1)(-a)+\cdots+3(-a)^{k-3}+2(-a)^{k-2}+(-a)^{k-1}$$

两式按同幂项相减得

$$(1+a)S=k-1-(-a)-\cdots-(-a)^{k-3}-(-a)^{k-2}-(-a)^{k-1}$$

$$=k-\frac{1-(-a)^k}{1+a}$$

$$S=\frac{k}{1+a}-\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{(-a)^k}{(1+a)^2}$$

代入(12.10)得通解

$$x(kT)=C(-a)^k+\frac{Tk}{1+a}-\frac{T}{(1+a)^2} \tag{12.10$'$}$$

其中$C=x(0)+T/(1+a)^2$

若$a=-1$，则(12.10)成为

$$x(kT)=x(0)+T\{1+2+\cdots+(k-2)+(k-1)$$

$$=x(0)+Tk(k-1)/2\}$$

此为　$x(kT+T)-x(kT)=kT$　的解

另解　施用z变换于所给方程，注意

$$Z[kT]=Tz/(z-1)^2$$

则(12.3)此时成为

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z+a}+T\frac{z}{(z-1)^2(z+a)} \tag{12.11}$$

若$a\neq-1$，则查续表41°可有

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2(z+a)}\right]=\frac{k}{1+a}-\frac{1-(-a)^k}{(1+a)^2} \tag{12.12}$$

按(12.11)取反z变换并利用(12.12)即得解如上之(12.10)′。注意这里的(12.12)恰好是上面的和S。因此，这里不需要繁杂的求和工作。

若$a=-1$，则(12.11)成为

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z-1}+T\frac{z}{(z-1)^3} \tag{12.13}$$

查续表40°得　$x(kT+T)-x(kT)=kT$　的解

$$x(kT)=x(0)+Tk(k-1)/2$$

例3． $x(kT+T)+ax(kT)=(kT)^2$

解　这里$f(kT)=(kT)^2$，代入(12.6)　得解

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+T^2\{(-a)^{k-2}+4(-a)^{k-3}+\cdots+(k-2)^2(-a)+(k-1)^2\} \tag{12.14}$$

我们把花括号中之式化成封闭形。设

$$S=(k-1)^2+(k-2)^2x+(k-3)^2x^2+\cdots+1^2x^{k-2} \quad (x=-a)$$

则$xS=(k-1)^2x+(k-2)^2x^2+\cdots+2^2x^{k-2}+x^{k-1}$

两式按同幂项相减，可有

$$(1-x)S=(k-1)^2-(2k-3)x-(2k-5)x^2-\cdots-3x^{k-2}-x^{k-1}$$

再乘以x，可有

$$x(1-x)S=(k-1)^2x-(2k-3)x^2-\cdots-5x^{k-2}-3x^{k-1}-x^k$$

两式按同幂项相减，可见在$x\neq1$时，

$$\begin{aligned}(1-x)^2S&=(k-1)^2-k^2x+2x+2x^2+\cdots+2x^{k-1}+x^k\\&=(k-1)^2-k^2x+\frac{2(x-x^k)}{1-x}+x^k\\&=k^2(1-x)-2k+\frac{1+x}{1-x}-\frac{1+x}{1-x}x^k\end{aligned}$$

从而 $S=\dfrac{k^2}{1-x}-\dfrac{2k}{(1-x)^2}+\dfrac{1+x}{(1-x)^3}-\dfrac{1+x}{(1-x)^3}x^k$

$(x\neq1)$

换x为$-a$，可见在$a\neq-1$时，

$$S=\frac{k^2}{1+a}-\frac{2k}{(1+a)^2}+\frac{1-a}{(1+a)^3}-\frac{1-a}{(1+a)^3}(-a)^k$$

代入(12.14)可有解

$$x(kT)=C(-a)^k+T^2\left\{\frac{k^2}{1+a}-\frac{2k}{(1+a)^2}+\frac{1-a}{(1+a)^3}\right\} \tag{12.15}$$

其中$C=x(0)-[T^2(1-a)/(1+a)^3]$　且$a\neq-1$

若$a=-1$,则(12.14)成为

$$\begin{aligned}x(kT)&=x(0)+T^2\{1^2+2^2+\cdots+(k-2)^2+(k-1)^2\}\\&=x(0)+T^2k(k-1)(2k-1)/6\end{aligned} \tag{12.16}$$

此为　$x(kT+T)-x(kT)=(kT)^2$　的解。

另解，运用z变换于所给方程

$$x(kT+T)+ax(kT)=(kT)^2$$

并用表5°，可有

$$z[X(z)-x(0)]+aX(z)=T^2(z^2+z)/(z-1)^3$$

于是

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z+a}+T^2\frac{z^2+z}{(z-1)^3(z+a)} \qquad (12.17)$$

若$a\neq-1$，查续表45°，取反z变换得解

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+T^2\left\{\frac{(k+1)k+k(k-1)}{2(1+a)}\right.$$

$$\left.-\frac{(k+1)+k}{(1+a)^2}+\frac{[1-(-a)^{k+1}]+[1-(-a)^k]}{(1+a)^3}\right\}$$

$$=x(0)(-a)^k+T^2\left\{\frac{k^2}{1+a}-\frac{2k}{(1+a)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1-a}{(1+a)^3}+\frac{a-1}{(1+a)^3}(-a)^k\right\}$$

末端花括号中之式就是上解中之和S。因此，这解法避免了化一个$k-1$项和化成封闭形的繁杂工作，注意这结果与(12.15)同。

若$a=-1$，则(12.17)成为

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z-1}+T^2\frac{z^2+z}{(z-1)^4} \qquad (12.18)$$

查续表36°，44°，按(12.18)取反z变换得方程

$$x(kT+T)-x(kT)=(kT)^2$$

的解

$$x(kT)=x(0)+T^2\{(k+1)k(k-1)$$

$$+k(k-1)(k-2)\}/6$$

$$=x(0)+T^2k(k-1)(2k-1)/6 \quad \text{同}(12.16)$$

例 4． $x(kT+T)+ax(kT)=\mu^k$

解．$f(kT)=\mu^k$，代入(12.6)得解

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+\{(-a)^{k-1}+\mu(-a)^{k-2}+\cdots+\mu^{k-2}(-a)+\mu^{k-1}\} \tag{12.19}$$

若$\mu\neq-a$，此解可化为

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+\frac{\mu^k-(-a)^k}{\mu+a}$$

$$=C(-a)^k+\frac{\mu^k}{\mu+a} \tag{12.20}$$

其中$C=x(0)-[1/(\mu+a)]$

若$\mu=-a$，则(12.19)成为

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+k(-a)^{k-1} \tag{12.21}$$

此为$x(kT+T)+ax(kT)=(-a)^k$的解。

另解．按原方程取z变换可有

$$z[X(z)-x(0)]+aX(z)=z/(z-\mu)$$

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z+a}+\frac{z}{(z-\mu)(z+a)} \tag{12.22}$$

若$\mu\neq-a$，查续表36°，38°，按(12.22)取反z变换可得解

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+\frac{\mu^k-(-a)^k}{\mu+a}$$

$$=\left\{x(0)-\frac{1}{\mu+a}\right\}(-a)^k+\frac{\mu^k}{\mu+a}$$

与(12.20)同。

若$\mu=-a$，则(12.22)成为

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z+a}+\frac{z}{(z+a)^2} \tag{12.23}$$

查续表37°，就(12.23)取反 z 变换得解

$$x(kT)=x(0)(-a)^k+k(-a)^{k-1}\text{如}(12.21)$$

例 5. $x(kT+T)+ax(kT)=\cos(\omega kT)$ (12.24)

$$y(kT+T)+ay(kT)=\sin(\omega kT) \quad (12.25)$$

解 令 $w=x+jy$，则(12.24) $+j$(12.25)给出

$$w(kT+T)+aw(kT)=e^{jwkT} \quad (12.26)$$

于(12.20)取 $\mu=e^{jwT}$ 得(12.26)的解：

$$w(kT)=\left(w(0)-\frac{1}{a+e^{jwT}}\right)(-a)^k+\frac{e^{jwkT}}{a+e^{jwT}}$$

以 $a+e^{-jwT}$ 乘分母及分子，并注意

$$(a+e^{jwT})(a+e^{-jwT})=a^2+2a\cos wT+1$$

则上式化成

$$w(kT)=\left(w(0)-\frac{a+e^{-jwT}}{a^2+2a\cos\omega T+1}\right)(-a)^k$$

$$+\frac{ae^{j\omega kT}+e^{j\omega(k-1)T}}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

分开实部及虚部即得(12.24)及(12.25)之解：

$$x(kT)=\left(x(0)-\frac{a+\cos\omega T}{a^2+2a\cos\omega T+1}\right)(-a)^k$$

$$+\frac{a\cos\omega kT+\cos\omega(k-1)T}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

$$=\left(x(0)-\frac{a+\cos\omega T}{a^2+2a\cos\omega T+1}\right)(-a)^k$$

$$+\frac{(a+\cos\omega T)\cos\omega kT+\sin\omega T\sin\omega kT}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

$$y(kT)=\left(y(0)+\frac{\sin\omega T}{a^2+2a\cos\omega T+1}\right)(-a)^k$$

$$+\frac{a\sin\omega kT+\sin\omega(k-1)T}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

$$=\left(y(0)+\frac{\sin\omega T}{a^2+2a\cos\omega T+1}\right)(-a)^k$$

$$+\frac{(a+\cos\omega T)\sin\omega kT-\sin\omega T\cos\omega kT}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

另解，按(12.24)及(12.25)取 z 变换并利用表12°、13°得

$$z[X(z)-x(0)]+aX(z)=\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

$$z[Y(z)-y(0)]+aY(z)=\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

于是

$$X(z)=x(0)\frac{z}{z+a}+\frac{z(z-\cos\omega T)}{(z^2-2z\cos\omega T+1)(z+a)} \tag{12.27}$$

$$Y(z)=y(0)\frac{z}{z+a}+\frac{z\sin\omega T}{(z^2-2z\cos\omega T+1)(z+a)} \tag{12.28}$$

查续表43°，可有

$$Z^{-1}\left[\frac{z^2-z\cos\omega T}{(z^2-2z\cos\omega T+1)(z+a)}\right]$$

$$=\frac{\sin(\omega kT)-\cos\omega T\sin[\omega(k-1)T]}{\sin\omega T(a^2+2a\cos\omega T+1)}$$

$$+\frac{a\{\sin[\omega(k+1)T]-\cos\omega T\sin(\omega kT)\}}{\sin\omega T(a^2+2a\cos\omega T+1)}$$

$$+\frac{(-a)^k(-a-\cos\omega T)}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

$$=\frac{(a+\cos\omega T)\cos(\omega kT)+\sin\omega T\sin(\omega kT)}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

$$-\frac{(-a)^k(a+\cos\omega T)}{a^2+2a\cos\omega T+1} \tag{12.29}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{z\sin\omega T}{(z^2-2z\cos\omega T+1)(z+a)}\right]$$

$$=\frac{\sin\omega T\sin[\omega(k-1)T]}{\sin\omega T(a^2+2a\cos\omega T+1)}$$

$$+\frac{a\sin\omega T\sin(\omega kT)}{\sin\omega T(a^2+2a\cos\omega T+1)}$$

$$+\frac{(-a)^k\sin\omega T}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

$$=\frac{(a+\cos\omega T)\sin(\omega kT)-\sin\omega T\cos(\omega kT)}{a^2+2a\cos\omega T+1}$$

$$+\frac{(-a)^k\sin\omega T}{a^2+2a\cos\omega T+1} \tag{12.30}$$

按(12.27)及(12.28)分别取反 z 变换，利用(12.29)(12.30)即可得(12.24)及(12.25)之解。

附记：因$a^2+2a\cos\omega T+1=(a+\cos\omega T)^2+\sin^2\omega T$，故例外情形为 $\sin\omega T=0$，$\cos\omega T=\pm1$，$a=\mp1$ 此时原给方程为

$$x(kT+T)\pm x(kT)=\mp1,$$

$$y(kT+T)\pm y(kT)=0$$

它们的解易于求出，读者可自行证明之。

§ 13 带右端项的二阶常系数线性差分方程的解

我们来解差分方程

$$x(kT+2T)+a\,x(kT+T)+b\,x(kT)=f(kT) \tag{13.1}$$

取 Z 变换，可有

$$z^2[X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}]+az[X(z)-x(0)]+bX(z)=F(z)$$

其中　$X(z)=Z[x(kT)]$　$F(z)=Z[f(kT)]$

由此可有

$$(z^2+az+b)X(z)=x(0)z^2+[x(T)+a\,x(0)]z+F(z)$$

从而

$$X(z)=\frac{x(0)z^2+[x(T)+a\,x(0)]z}{z^2+az+b}+\frac{F(z)}{z^2+az+b} \tag{13.2}$$

由§11的(11.3′)可见，右端第一分式的反 z 变换给出相应不带右端项的方程的通解，即(13.1)的补函数，从而右端第二分式的反 z 变换给出(13.1)的一个特解。

设　$z^2+az+b=0$　两根为 α，β

(i)　设　$\alpha\neq\beta$，则按(13.2)取反 z 变换，可有

$$x(kT)=C_1\alpha^k+C_2\beta^k+Z^{-1}\left[\frac{F(z)}{z^2+az+b}\right] \qquad (13.3)$$

其中C_1及C_2为常数。又

$$\frac{F(z)}{z^2+az+b}=\frac{F(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{1}{z-\alpha}F(z)-\frac{1}{z-\beta}F(z)\right\} \qquad (13.4)$$

如§12的(12.4)，写

$$\varphi_1(kT)=\begin{cases}\alpha^{k-1} & 在k\geqslant 1\\ 0 & 在k=0\end{cases}$$

$$\varphi_2(kT)=\begin{cases}\beta^{k-1} & 在k\geqslant 1\\ 0 & 在k=0\end{cases}$$

则(13.4)可写成

$$\frac{F(z)}{z^2+az+b}=\frac{1}{\alpha-\beta}\{Z[\varphi_1(kT)]Z[f(kT)]$$

$$-Z[\varphi_2(kT)Z[f(kT)]]\}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\{Z[(\varphi_1*f)(kT)]$$

$$-Z[(\varphi_2*f)(kT)]\}$$

于是

$$Z^{-1}\left[\frac{F(z)}{z^2+az+b}\right]=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\varphi_1*f)(kT)-(\varphi_2*f)(kT)\}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\{f(0)\varphi_1(kT)+f(T)\varphi_1(kT-T)+\cdots\cdots$$

$$+f(kT-T)\varphi_1(T)+f(kT)\varphi_1(0)$$

$$-f(0)\varphi_2(kT)-f(T)\varphi_2(kT-T)-\cdots\cdots$$
$$-f(kT-T)\varphi_2(T)-f(kT)\varphi_2(0)\}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\{f(0)(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})+f(T)(\alpha^{k-2}-\beta^{k-2})+\cdots$$
$$+f(kT-2T)(\alpha-\beta)\} \qquad (13.5)$$

把(13.5)代入(13.3)，可得(13.1)的通解

$$x(kT)=C_1\alpha^k+C_2\beta^k$$
$$+\frac{1}{\alpha-\beta}\{f(0)(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})+$$
$$+f(T)(\alpha^{k-2}-\beta^{k-2})+\cdots+f(kT-2T)(\alpha-\beta)\}$$
$$(13.6)$$

我们也可用递推法得出特解(13.5)。因为我们目的只求特解，为简单起见，由(13.2)我们可取

$$x(0)=0 \qquad x(T)=0$$

在这两个条件下，于(13.1)取 $k=0$，可有

$$x(2T)=f(0) \qquad ⓐ$$

于(13.1)中取$k=1$得$x(3T)+a\,x(2T)=f(T)$，注意 $-a=\alpha+\beta$，利用ⓐ，可得

$$x(3T)=(\alpha+\beta)f(0)+f(T) \qquad ⓑ$$

于(13.1)中取$k=2$,可有 $x(4T)+a\,x(3T)+b\,x(2T)=f(2)T$

注意 $a=-(\alpha+\beta)$，$b=\alpha\beta$，并利用ⓐ及ⓑ，可有

$$x(4T)=(\alpha+\beta)x(3T)-\alpha\beta\,x(2T)+f(2T)$$
$$=(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)f(0)+(\alpha+\beta)f(T)+f(2T)$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha^3-\beta^3)f(0)+(\alpha^2-\beta^2)f(T)$$
$$+(\alpha-\beta)f(2T)\}$$

由此我们归纳出：

$$x(kT)=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})f(0)$$

$$+(\alpha^{k-2}-\beta^{k-2})f(T)+\cdots+(\alpha-\beta)f(kT-2T)\} \quad ⓒ$$

我们来完成归纳法：我们设ⓒ将 k 换为 $k+1$ 也成立，即设

$$x(kT+T)=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha^{k}-\beta^{k})f(0)$$

$$+(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})f(T)+\cdots+(\alpha-\beta)f(kT-T)\} \quad ⓓ$$

如果由方程(13.1)并根据ⓒ和ⓓ能得出 $x(kT+2T)$ 也具有类似的形式（即于ⓒ将 k 换为 $k+2$ 所得的形式），那末归纳法即告完成。现由(13.1)可有

$$x(kT+2T)=(\alpha+\beta)x(kT+T)-\alpha\beta x(kT)+f(kT) \quad ⓔ$$

以ⓓ及ⓒ代入ⓔ并注意

$$(\alpha+\beta)(\alpha^{k}-\beta^{k})-\alpha\beta(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})\equiv\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}$$

以及将k换为$k-1$，$k-2$，……，2，1的类似等式，可直接得到

$$x(kT+2T)=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})f(0)$$

$$+(\alpha^{k}-\beta^{k})f(T)+\cdots+(\alpha^{3}-\beta^{3})f(kT-2T)$$

$$+(\alpha^{2}-\beta^{2})f(kT-T)\}+f(kT)$$

这和ⓒ及ⓓ有类似的形式，即可于ⓒ将 k 换为 $k+2$ 或于ⓓ将 k 换为 $k+1$ 得出。(13.5)由归纳法重新得证。

对于具体的例子，我们也可不用卷积公式

$$Z[\varphi(kT)]Z[f(kT)]=Z[(\varphi*f)(kT)]$$

而用查表法或留数法直接求

$$Z^{-1}\left[\frac{F(z)}{z^2+az+b}\right]$$

(ii) 设α，β为两共轭复根。用三角式

$$\alpha=\rho(\cos\varphi+j\sin\varphi)\quad \beta=\rho(\cos\varphi-j\sin\varphi)$$

此时，$a=-(\alpha+\beta)=-2\rho\cos\varphi \quad b=\alpha\beta=\rho^2$ 将α及β之式代入(13.6)，通解变成

$$\begin{aligned}x(kT)=&\rho^k(A\cos k\varphi+B\sin k\varphi)+\\&+\frac{1}{\sin\varphi}\{f(0)\rho^{k-2}\sin(k-1)\varphi+\\&+f(T)\rho^{k-3}\sin(k-2)\varphi+\cdots+f(kT-2T)\sin\varphi\}\end{aligned} \tag{13.7}$$

(iii) 设$\beta=\alpha$，则补函数为$\alpha^k(C_1+C_2k)$ 特解为

$$Z^{-1}\left[\frac{F(z)}{(z-\alpha)^2}\right]$$

令

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-\alpha)^2}&=\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)^{-2}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{2\alpha}{z}+\frac{3\alpha^2}{z^2}+\cdots\right.\\&\left.\quad+\frac{(k-1)\alpha^{k-2}}{z^{k-2}}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{z^2}+\frac{2\alpha}{z^3}+\frac{3\alpha^2}{z^4}+\cdots+\frac{(k-1)\alpha^{k-2}}{z^k}+\cdots\end{aligned}$$

故写

$$\psi(kT)=\begin{cases}(k-1)\alpha^{k-2} & 在k\geqslant1\\0 & 在k=0\end{cases}$$

可有
$$\frac{1}{(z-\alpha)^2}=Z[\psi(kT)]$$

注意这结果亦可由

$$\frac{z}{(z-a)^2}=Z[k\,a^{k-1}] \quad (37°)$$

应用§6性质（三）的第一式得出（取该处$n=1$）。

注意 $F(z)=Z[f(kT)]$ 于是

$$\frac{F(z)}{(z-a)^2}=Z[\psi(kT)]Z[f(kT)]=Z[(\psi * f)(kT)]$$

$$=Z[\psi(0)f(kT)+\psi(T)f(kT-T)$$

$$+\psi(2T)f(kT-2T)+\psi(3T)f(kT-3T)$$

$$+\cdots+\psi(kT)f(0)]$$

$$=Z[f(kT-2T)+2af(kT-3T)+\cdots$$

$$+(k-1)a^{k-2}f(0)]$$

故特解为

$$Z^{-1}\left[\frac{F(z)}{(z-a)^2}\right]=f(0)(k-1)a^{k-2}+$$

$$+f(T)(k-2)a^{k-3}+\cdots+f(kT-3T)2a$$

$$+f(kT-2T) \quad (13.8)$$

注意这结果可于(13.5)中令$\beta\to a$取极限得出：

$$\lim_{\beta\to a}\frac{a^{k-1}-\beta^{k-1}}{a-\beta}=(k-1)a^{k-2} \quad \text{（按罗比达法则）}$$

等等。特解(13.8)亦可于(13.7)令$\varphi\to 0$，$\rho\to a$取极限得到

$$\left.\frac{\sin(k-1)\varphi}{\sin\varphi}\right|_{\varphi=0}=k-1, \ \cdots$$

加补函数$a^k(C_1+C_2k)$于(13.8)即得

$$x(kT+2T)-2ax(kT+T)+a^2x(kT)=f(kT)$$

的通解

$$x(kT)=\alpha^k(C_1+C_2k)+[f(0)(k-1)\alpha^{k-2}+f(T)(k-2)\alpha^{k-3}+\cdots+f(kT-3T)2\alpha+f(kT-2T)] \tag{13.8'}$$

我们举几个例子。

例1. $x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)=\mu^k$

解 $f(kT)=\mu^k$ 设 $r^2+ar+b=0$ 的两根为 α，β

(i) $\alpha\neq\beta$ 由(13.6)，通解为

$$x(kT)=C_1\alpha^k+C_2\beta^k+\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})+\mu(\alpha^{k-2}-\beta^{k-2})+\cdots+\mu^{k-2}(\alpha-\beta)\}$$

$$=C_1\alpha^k+C_2\beta^k+\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha^{k-1}+\mu\alpha^{k-2}+\cdots+\mu^{k-2}\alpha)-(\beta^{k-1}+\mu\beta^{k-2}+\cdots+\mu^{k-2}\beta)\} \quad (*)$$

若 μ 不为辅助方程 $r^2+ar+b=0$ 之根，即 $\mu^2+a\mu+b\neq0$ ($\mu\neq\alpha$，$\mu\neq\beta$)，则将花括号中之式化成封闭形得通解

$$x(kT)=C_1\alpha^k+C_2\beta^k+\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha^k-\alpha\mu^{k-1}}{\alpha-\mu}-\frac{\beta^k-\beta\mu^{k-1}}{\beta-\mu}\right)$$

$$=A\alpha^k+B\beta^k+\frac{\mu^{k-1}}{\alpha-\beta}\left(\frac{\beta}{\beta-\mu}-\frac{\alpha}{\alpha-\mu}\right)$$

$$=A\alpha^k+B\beta^k+\frac{\mu^k}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)}$$

$$=A\alpha^k+B\beta^k+\frac{\mu^k}{\mu^2+a\mu+b} \tag{13.9}$$

其中A及B为常数(与k无关)。一特解为$\frac{\mu^k}{\mu^2+a\mu+b}$，形式很简单，分母是以$\mu$代辅助方程的未知数的结果。

若$\mu=\alpha\neq\beta$，则所给方程右端为α^k，并且由(*)，可见通解为

$$x(kT)=C_1\alpha^k+C_2\beta^k+$$
$$+\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{(k-1)\alpha^{k-1}-\frac{\beta^k-\beta\alpha^{k-1}}{\beta-\alpha}\right\}$$
$$=A\alpha^k+B\beta^k+\frac{k\alpha^{k-1}}{\alpha-\beta} \qquad (13.10)$$

其中A及B不依赖k。一个特解为$k\alpha^{k-1}/(\alpha-\beta)$。

(ii) 设α及β为共轭复根：

$$\alpha=\rho(\cos\varphi+j\sin\varphi) \quad \beta=\rho(\cos\varphi-j\sin\phi)$$

原给方程可写成

$$x(kT+2T)-2\rho\cos\varphi x(kT+T)+\rho^2x(kT)=\mu^k \qquad (13.11)$$

辅助方程为 $\nu^2-2\rho\cos\varphi\cdot\nu+\rho^2=0$ 如果μ为实数，则μ不是辅助方程之根，故(13.9)仍能用，从而(13.11)的通解为

$$x(kT)=\rho^k(c_1\cos k\varphi+c_2\sin k\varphi)+\mu^k/(\mu^2+a\mu+b)$$
$$=\rho^k(c_1\cos k\varphi+c_1\sin k\varphi)$$
$$+\mu^k/(\mu^2+\rho^2-2\mu\rho\cos\varphi) \qquad (13.12)$$

(iii) $\beta=\alpha$，此时所给方程成为

$$x(kT+2T)-2\alpha x(kT+T)+\alpha^2x(kT)=\mu^k$$

辅助方程为$r^2-2\alpha r+\alpha^2=0$ 补函数为$\alpha^k(C_1+C_2k)$ 如果$\mu\neq\alpha$，则由(13.9)可得解$\mu^k/(\mu^2+a\mu+b)=\mu^k/(\mu-\alpha)^2$ 此结果亦可于(13.12)末项取$\varphi=0$，$\rho=\alpha$得到。此

时通解为

$$x(kT)=a^k(C_1+C_2k)+\mu^k/(\mu-a)^2 \tag{13.13}$$

如果 $\mu=a$ 则所给方程成为

$$x(kT+2T)-2a\,x(kT+T)+a^2x(kT)=a^k \tag{13.14}$$

其一特解按(13.8)为

$$\begin{aligned}&1\cdot(k-1)a^{k-2}+a(k-2)a^{k-3}+\cdots+a^{k-3}\cdot 2a+a^{k-2}\cdot 1\\&=(k-1)a^{k-2}+(k-2)a^{k-2}+\cdots+2a^{k-2}+a^{k-2}\\&=a^{k-2}[(k-1)+(k-2)+\cdots+2+1]=k(k-1)a^{k-2}/2\end{aligned}$$

此特解亦可借助于(13.13)得出。由(13.13)可见一特解为

$$\left.\frac{\mu^k-\mu k a^{k-1}+(k-1)a^k}{(\mu-a)^2}\right|_{\mu=a}$$

按罗毕达法则，得

$$\left.\frac{k\mu^{k-1}-ka^{k-1}}{2(\mu-a)}\right|_{\mu=a}=\frac{k(k-1)a^{k-2}}{2}$$

故(13.14)的通解为

$$\left.\begin{aligned}x(kT)&=a^k(C_1+C_2k)+k(k-1)a^{k-2}/2\\&=a^k(A+Bk)+k^2a^{k-2}/2\end{aligned}\right\} \tag{13.15}$$

另解，我们用待定系数法求

$$x(kT+2T)+a\,x(kT+T)+b\,x(kT)=\mu^k \tag{13.16}$$

的特解。我们设此方程有

$$x(kT)=A\mu^k \tag{13.17}$$

形式的解，其中 A 为待定常数。以(13.17)代入(13.16)可有

$$A\mu^{k+2}+aA\mu^{k+1}+bA\mu^k=\mu^k$$

即

$$A(\mu^2+a\mu+b)=1$$

如果 $\mu^2+a\mu+b\neq 0$，可得 $A=1/(\mu^2+a\mu+b)$，从而得特解 $\mu^k/(\mu^2+a\mu+b)$，同(13.9)中末项，加上补函数即得通解。如果 $\mu^2+a\mu+b=0$，则不能设(13.17)形式的特解。

现在我们可设特解

$$x(kT)=Ak\mu^k,\ A\text{为待定常数} \tag{13.18}$$

以(13.18)代入(13.16)可有

$$A(k+2)\mu^{k+2}+aA(k+1)\mu^{k+1}+bAk\mu^k=\mu^k$$

即 $\quad Ak(\mu^2+a\mu+\upsilon)+A(2\mu^2+a\mu)=1$

即 $\quad A(2\mu+a)\mu=1$

如果$2\mu+a\neq 0$ （当然$\mu\neq 0$），可得$A=1/(2\mu^2+a\mu)$。特解为 $\dfrac{k\mu^k}{2\mu^2+a\mu}=\dfrac{k\mu^{k-1}}{2\mu+a}$ 由$2\mu+a=2\alpha+a=2\alpha-(\alpha+\beta)$ $=(\alpha-\beta)$，此与(13.10)的末项相同

如果 $2\mu+a=0$， 则设特解(13.18)也不行，我们可设特解 $\quad x(kT)=Ak^2\mu^k \quad\quad (13.19)$

以此代入(13.16)得

$$A(k+2)^2\mu^{k+2}+aA(k+1)^2\mu^{k+1}+bAk^2\mu^k=\mu^k$$

即 $\quad A[(k+2)^2\mu^2+a(k+1)^2\mu+bk^2]=1$

即 $\quad A[k^2(\mu^2+a\mu+b)+2k(2\mu^2+a\mu)+4\mu^2+a\mu]=1$

计及$\mu^2+a\mu+b=0$，$2\mu^2+a\mu=0$，此化成$A\cdot 2\mu^2=1$，从而$A=1/(2\mu^2)$代入(13.19)得特解

$$x(kT)=k^2\mu^{k-2}/2\quad \text{同(13.15)末项。}$$

此时所给方程为$x(kT+2T)-2\mu x(kT+T)+\mu^2x(kT)=\mu^k$

这种方法看起来很简单，但作三种假定(13.17)，(13.18)，(13.19)是不容易想出的。

三解。直接运用z变换于所给方程(13.16)，可有

$$z^2[X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}]+az[X(z)-x(0)]$$

$$+bX(z)=\frac{z}{z-\mu}$$

$$X(z)=\frac{x(0)z^2+[x(T)+a\,x(0)]z}{z^2+az+b}$$

$$+\frac{z}{(z^2+az+b)(z-\mu)}$$

如(13.2)，右端第一分式的反 z 变换给出补函数。我们只须求特解

$$\varphi(kT)=Z^{-1}\left\{\frac{z}{(z^2+az+b)(z-\mu)}\right\} \quad (13.20)$$

第一解法乃是利用§6性质（五）卷积公式。现在我们查表求(13.20)，以 α，β 表示辅助方程 $r^2+ar+b=0$ 的两根。

（i） 设 $\alpha\neq\beta$（包括 α 及 β 为一对共轭复数），并设 $\mu\neq\alpha$，$\mu\neq\beta$，则查续表42°，可有

$$\varphi(kT)=Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\mu)}\right]$$

$$=\frac{\alpha^k}{(\alpha-\beta)(\alpha-\mu)}+\frac{\beta^k}{(\beta-\alpha)(\beta-\mu)}$$

$$+\frac{\mu^k}{(\mu-\alpha)(\mu-\beta)}$$

末端前两项已包含在补函数中，故可取特解

$$\frac{\mu^k}{(\mu-\alpha)(\mu-\beta)}=\frac{\mu^k}{\mu^2+a\mu+b}$$ 同(13.9)末项。

如果 $\mu=\alpha\neq\beta$，则查续表41°，可有

$$\varphi(kT)=Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\beta)}\right]$$

$$=\frac{k\alpha^{k-1}}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^k-\beta^k}{(\alpha-\beta)^2}$$

末端末项已包含在补函数中，故可取特解

$k\alpha^{k-1}/(\alpha-\beta)$ 同(13.10)末项。

(ii) 设$\beta=\alpha$并设$\mu\neq\alpha$，则查续表41°，

$$\varphi(kT)=Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-\alpha)^2(z-\mu)}\right]$$

$$=\frac{k\alpha^{k-1}}{\alpha-\mu}-\frac{\alpha^k-\mu^k}{(\alpha-\mu)^2}$$

舍去包含在补函数$(C_1+C_2k)\alpha^k$中之项，可取特解

$\mu^k/(\mu-\alpha)^2=\mu^k/(\mu^2+a\mu+b)$ 同(13.9)末项。

若$\mu=\alpha=\beta$，则查续表40°，可有

$$\varphi(kT)=Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-\alpha)^3}\right]=\frac{1}{2}k(k-1)\alpha^{k-2}$$

$$=\frac{1}{2}k^2\alpha^{k-2}-\frac{1}{2\alpha^2}\cdot k\alpha^k$$

(在$\alpha\neq0$)

并且末项包含在补函数中，故可取特解$k^2\alpha^{k-2}/2$，与(13.15)末项相同。如果$\alpha=0$则原方程成为$x(kT+2T)=\alpha^k$，而我们应理解：在$\alpha=0$时，$\alpha^k|_{k=0}=1$并且$\alpha^k|_{k\geq1}=0$特解为$\frac{1}{2}k(k-1)\alpha^{k-2}|_{\alpha=0}$

例2. $x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)$
$=\cos(\omega kT)$
$y(kT+2T)+ay(kT+T)+by(kT)$
$=\sin(\omega kT)$

解 写$w=x+jy$，则

$w(kT+2T)+aw(kT+T)+bw(kT)=e^{j\omega kT}$

取$\mu=e^{j\omega T}$，这就是例1的方程。如果$e^{j\omega T}$不是辅助方程的根，即如果$e^{2j\omega T}+ae^{j\omega T}+b\neq 0$，则由(13.9)的末项，可得$w$—方程的特解

$$\frac{e^{j\omega kT}}{e^{2j\omega T}+ae^{j\omega T}+b}=\frac{e^{j\omega kT}(e^{-2j\omega T}+ae^{-j\omega T}+b)}{(e^{2j\omega T}+ae^{j\omega T}+b)(e^{-2j\omega T}+ae^{-j\omega T}+b)}$$

$$=\frac{e^{j\omega(k-2)T}+ae^{j\omega(k-1)T}+be^{j\omega kT}}{1+a^2+b^2+2a(1+b)\cos\omega T+2b\cos(2\omega T)}$$

分开实部及虚部即得x—方程及y—方程的特解

$$\frac{\cos[\omega(k-2)T]+a\cos[\omega(k-1)T]+b\cos(\omega kT)}{1+a^2+b^2+2a(1+b)\cos\omega T+2b\cos(2\omega T)}$$

①

及 $$\frac{\sin[\omega(k-2)T]+a\sin[\omega(k-1)T]+b\sin(\omega kT)}{1+a^2+b^2+2a(1+b)\cos\omega T+2b\cos(2\omega T)}$$

若$e^{j\omega T}$为辅助方程$r^2+ar+b=0$的根，则$e^{-j\omega T}$亦为此方程的根。于是w—方程可表示为

$$w(kT+2T)-2\cos\omega T\,w(kT+T)+w(kT)=e^{j\omega kT}$$

按(13.10)的末项，此w—方程的特解为

$$\frac{ke^{j\omega(k-1)T}}{e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}}=\frac{ke^{j\omega(k-1)T}}{2j\sin\omega T}$$

分开实部及虚部即得

$$x(kT+2T)-2\cos\omega T\,x(kT+T)+x(kT)=\cos(\omega kT)$$

及 $$y(kT+2T)-2\cos\omega T\,y(kT+T)+y(kT)=\sin(\omega kT)$$

的特解分别为

①加上相同的补函数即得所给两个方程的通解。

$$\frac{k\sin[\omega(k-1)T]}{2\sin\omega T} \quad 及 \quad -\frac{k\cos[\omega(k-1)T]}{2\sin\omega T}$$

上述两个方程的补函数均为 $C_1\cos(\omega kT)+C_2\sin(\omega kT)$，所以两方程的通解分别为

$$x(kT)=C_1\cos(\omega kT)+C_2\sin(\omega kT)+\frac{k\sin[\omega(k-1)T]}{2\sin\omega T}$$

及 $$y(kT)=C_1\cos(\omega kT)+C_2\sin(\omega kT)-\frac{k\cos[\omega(k-1)T]}{2\sin\omega T}$$

例3. $x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)=kT$ (13.21)

解 $f(kT)=kT$ 设辅助方程 $r^2+ar+b=0$ 的两根为 α，β

(i) $\alpha\neq\beta$. 按(13.5)，此方程的一个特解为

$$\frac{T}{\alpha-\beta}\{(\alpha^{k-2}-\beta^{k-2})+2(\alpha^{k-3}-\beta^{k-3})+\cdots$$

$$+(k-2)(\alpha-\beta)\}=\frac{T}{\alpha-\beta}(P-Q) \quad (13.22)$$

其中我们令

$$P=\alpha^{k-2}+2\alpha^{k-3}+\cdots+(k-3)\alpha^2+(k-2)\alpha \quad (13.23)$$

$$Q=\beta^{k-2}+2\beta^{k-3}+\cdots+(k-3)\beta^2+(k-2)\beta \quad (13.24)$$

我们把 P 变为封闭形。现

$$P=(k-2)\alpha+(k-3)\alpha^2+\cdots+2\alpha^{k-3}+\alpha^{k-2}$$

$$\alpha P=(k-2)\alpha^2+\cdots+3\alpha^{k-3}+2\alpha^{k-2}+\alpha^{k-1}$$

两式按同幂项相减，可有

$$(1-\alpha)P=(k-2)\alpha-\alpha^2-\cdots-\alpha^{k-3}-\alpha^{k-2}\alpha^{k}-\quad -1$$

若 $\alpha\neq 1$，则

$$(1-\alpha)P=(k-2)\alpha-\frac{\alpha^2-\alpha^b}{1-\alpha}=\frac{\alpha^k}{1-\alpha}+\frac{\alpha^2-2\alpha}{1-\alpha}+k\alpha$$

故 $$P=\frac{\alpha^k}{(1-\alpha)^2}+\frac{\alpha^2-2\alpha}{(1-\alpha)^2}+\frac{k\alpha}{1-\alpha}\quad(\alpha\neq 1)$$

(13.2

同样 $$Q=\frac{\beta^k}{(1-\beta)^2}+\frac{\beta^2-2\beta}{(1-\beta)^2}+\frac{k\beta}{1-\beta}\quad(\beta\neq 1)$$

(13.24′)

由于含 α^k 之项及含 β^k 之项已包含在补函数中，故以(13.23′)及(13.24′)代入(13.22)，可见在 $\alpha\neq 1$，$\beta\neq 1$，$\alpha\neq\beta$ 时，我们能取特解

$$\frac{T}{\alpha-\beta}\left\{\frac{\alpha^2-2\alpha}{(1-\alpha)^2}-\frac{\beta^2-2\beta}{(1-\beta)^2}+k\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{\beta}{1-\beta}\right)\right\}$$

$$=T\left\{\frac{(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta+1)-(\beta^2-2\beta)(\alpha^2-2\alpha+1)}{(\alpha-\beta)(1-\alpha)^2(1-\beta)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{k}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right\}$$

$$=T\left\{\frac{(\alpha^2-2\alpha)-(\beta^2-2\beta)}{(\alpha-\beta)(1-\alpha)^2(1-\beta)^2}+\frac{k}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right\}$$

$$=T\left\{\frac{\alpha+\beta-2}{[1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta]^2}+\frac{k}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\right\}$$

$$=T\left\{\frac{k}{1+a+b}-\frac{a+2}{(1+a+b)^2}\right\}\quad ①\qquad(13.25)$$

---

①注意消去分子及分母中的 $\alpha-\beta$，结果对 $\alpha=\beta$ 也能用

这解在 $1+a+b\neq 0$ 时能用。这条件意味着 1 不是辅助方程 $r^2+ar+b=0$ 的根（即 $\alpha\neq 1$，$\beta\neq 1$）。加补函数 $C_1\alpha^k+C_2\beta^k$ 于(13.25)即得通解。

若$\alpha=1\neq\beta$，即辅助方程的两根为1，β，则$1+\beta=-a$，且$\beta=b$，补函数为$C_1+C_2b^k$。又由(13.23)有

$$P=1+2+\cdots+(k-3)+(k-2)=(k-1)(k-2)/2$$

由(13.24′)，可有

$$Q=\frac{b^k}{(1-b)^2}+\frac{b^2-2b}{(1-b)^2}+\frac{kb}{1-b}$$

将P及Q代入(13.22)，不计包含在补函数中之项，可得特解

$$\frac{T}{1-b}\left\{\frac{1}{2}(k^2-3k)-\frac{bk}{1-b}\right\}$$

$$=\frac{T}{2}\left\{\frac{k^2}{1-b}+\frac{k(b-3)}{(1-b)^2}\right\}$$

故 $x(kT+2T)-(1+b)x(kT+T)+bx(kT)=kT$在$b\neq 1$时的通解为

$$x(kT)=C_1+C_2b^k+\frac{T}{2}\left\{\frac{k^2}{1-b}+\frac{k(b-3)}{(1-b)^2}\right\} \tag{13.26}$$

如果$\beta=1\neq\alpha$，亦得相同的结果。

(ii) 若$\beta=\alpha$，则所给方程成为

$$x(kT+2T)-2\alpha x(kT+T)+\alpha^2x(kT)=kT$$

补函数为$\alpha^k(C_1+C_2k)$，按(13.8)可有特解

$$T[1(k-2)\alpha^{k-3}+2(k-3)\alpha^{k-4}+\cdots+(k-3)2\alpha+(k-2)1] \tag{13.27}$$

$$=T\frac{d}{d\alpha}[1\cdot\alpha^{k-2}+2\alpha^{k-3}+\cdots+(k-3)\alpha^2+(k-2)\alpha]$$

$$= T\frac{dP}{da} \quad (由(13.23))$$

$$= T\frac{d}{da}\left[\frac{a^k}{(1-a)^2} + \frac{a^2-2a}{(1-a)^2} + \frac{ka}{1-a}\right]$$

(由(13.23′)，设 $a \neq 1$)

$$= T\left[\frac{ka^{k-1}}{(1-a)^2} + \frac{2a^k}{(1-a^3)} - \frac{2}{(1-a)^3} + \frac{k}{(1-a)^2}\right]$$

舍去前两项（它们包含在补函数中），可见在 $a \neq 1$ 时，我们能取特解如

$$T\left[\frac{k}{(1-a)^2} - \frac{2}{(1-a)^3}\right]$$

注意：在(13.25)中取 $a = -2a$，$b = a^2$，亦得此结果。故在 $a \neq 1$ 时，所求通解为

$$x(kT) = a^k(C_1 + C_2k) + T\left[\frac{k}{(1-a)^2} - \frac{2}{(1-a)^3}\right]$$

若 $a = 1$，则特解(13.27)成为

$$T[1\cdot(k-2) + 2(k-3) + \cdots + (k-3)2 + (k-2)1]$$

$$= T\{1[(k-1)-1] + 2[(k-1)-2] + \cdots$$

$$+ (k-3)[(k-1)-(k-3)] + (k-2)[(k-1)-(k-2)]\}$$

$$= T\{(k-1)[1+2+\cdots+(k-2)] - [1^2+2^2+\cdots+$$

$$+ (k-2)^2]\}$$

$$= T\left[\frac{1}{2}(k-1)^2(k-2) - \frac{1}{6}(k-1)(k-2)(2k-3)\right]$$

$$= \frac{T}{6}k(k-1)(k-2)$$

$$=\frac{T}{6}\{k^2(k-3)+2k\}$$

由于在此情况下补函数为C_1+C_2k，故可取特解

$$Tk^2(k-3)/6$$

从而得　$x(kT+2T)-2x(kT+T)+x(kT)$的通解

$$x(kT)=C_1+C_2k+Tk^2(k-3)/6$$

另解。考察上面的结果，可见（13.21）的特解一般是T乘k的一次式。我们能用待定系数法求方程（13.21）的特解。设(13.21)的特解如

$$T(Ak+B)$$

其中A及B为待定常数。代入(13.21)并消去T，可有

$$A(k+2)+B+a[A(k+1)+B]+b(Ak+B)\equiv k$$

即　$A(1+a+b)k+A(2+a)+B(1+a+b)\equiv k$

故　$A(1+a+b)=1\quad A(2+a)+B(1+a+b)=0$

如果　$1+a+b\neq 0$，则可解出

$$A=\frac{1}{1+a+b}\qquad B=-\frac{a+2}{(1+a+b)^2}$$

特解为　$T\left\{\frac{k}{1+a+b}-\frac{a+2}{(1+a+b)^2}\right\}$　　同(13.25)

加上补函数即得通解。条件$1+a+b\neq 0$表明1不是辅助方程$r^2+ar+b=0$的根。

若$1+a+b=0$，则所给方程(13.21)可写成

$$x(kT+2T)-(1+b)x(kT+T)+bx(kT)=kT \tag{13.28}$$

我们设特解

$$T(Ak+B)k=T(Ak^2+Bk)$$

代入(13.28)并消去T，可有

$$A(k+2)^2+B(k+2)-(1+b)[A(k+1)^2+B(k+1)] \\ +b(Ak^2+Bk)\equiv k$$

即　$2A(1-b)k+[(1-b)B+(3-b)A]\equiv k$

故　$2A(1-b)=1 \quad (1-b)B+(3-b)A=0$

若 $b\neq 1$，则可解得

$$A=\frac{1}{2(1-b)} \qquad B=\frac{b-3}{2(1-b)^2}$$

于是(13.28)的一个特解为

$$T\left[\frac{k^2}{2(1-b)}+\frac{k(b-3)}{2(1-b)^2}\right]$$ 同(13.26)的末项。

如果 $b=1$，则由 $1+a+b=0$，可见 $a=-2$，差分方程成为

$$x(kT+2T)-2x(kT+T)+x(kT)=kT \qquad (13.29)$$

此时补函数为C_1+C_2k。如仍设特解 $T(Ak^2+Bk)$，则第二项为补函数中之项。因此，设(13.29)的特解为$T(Ak^2+Bk)k=T(Ak^3+Bk^2)$，代入(13.29)，并消去T，可有

$$\left.\begin{aligned} &A(k+2)^3+B(k+2)^2 \\ &\qquad -2A(k+1)^3-2B(k+1)^2 \\ &\qquad +Ak^3+Bk^2 \end{aligned}\right\}\equiv k$$

即　$6Ak+(6A+2B)=0$

从而　$6A=1 \quad 6A+2B=0$

于是　$A=1/6 \quad B=-1/2$

故特解为　$T(k^3-3k^2)/6=Tk^2(k-3)/6$

通解为　$x(kT)=C_1+C_2k+Tk^2(k-3)/6$　与上解(*)相同

三解　施 z 变换于(13.21)可有

$$z^2[X(z)-x(0)-x(T)z^{-1}]+az[X(z)-x(0)]+bX(z)=Z[kT]$$

即

$$(z^2+az+b)X(z)=x(0)z^2+[x(T)+ax(0)]z+\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$X(z)=\frac{x(0)z^2+[x(T)+ax(0)]z}{z^2+az+b}+\frac{Tz}{(z^2+az+b)(z-1)^2}$$

右端第一项的反 z 变换给出补函数，第二项的反 z 变换给出特解

$$TZ^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+az+b)(z-1)^2}\right] \tag{13.30}$$

以 α，β 表示 $z^2+az+b=0$ 的两根，并设 $\alpha\neq\beta$，再设 1 不是这方程的根，即 $1+a+b\neq 0$，则查续表 47°，可见特解(13.30)等于

$$T\left[\frac{k}{(1-\alpha)(1-\beta)}-\frac{2-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2}+\frac{\alpha^k}{(\alpha-1)^2(\alpha-\beta)}+\frac{\beta^k}{(\beta-1)^2(\beta-\alpha)}\right]$$

由于末两项已包含在补函数中，故可取特解

$$T\left[\frac{k}{(1-\alpha)(1-\beta)}-\frac{2-\alpha-\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2}\right]$$

$$=T\left[\frac{k}{1+a+b}-\frac{2+a}{(1+a+b)^2}\right]$$ 同(13.25)

若$1+a+b=0$，即$a=-(1+b)$，则(13.30)可写成

$$TZ^{-1}\left[\frac{z}{(z-b)(z-1)^3}\right] \tag{13.31}$$

若 $b\neq 1$，则查续表45°，其结果等于

$$T\left[\frac{k(k-1)}{2(1-b)}-\frac{k}{(1-b)^2}+\frac{1-b^k}{(1-b)^3}\right]$$

由于末一项已包含在补函数中，故可取特解

$$T\left[\frac{k(k-1)}{2(1-b)}-\frac{k}{(1-b)^2}\right]=\frac{T}{2}\left[\frac{k^2}{1-b}+\frac{k(b-3)}{(1-b)^2}\right]$$

同(13.26)中的特解。

若 $b=1$，则(13.31)成为$TZ^{-1}[z/(z-1)^4]$ 查续表44°，其结果等于$Tk(k-1)(k-2)/6$ 同上二解末

例4. $x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)=(kT)^2$

(13.32)

解 以α及β表辅助方程$r^2+ar+b=0$的两根。

(i) $\alpha\neq\beta$，按(13.6)，方程(13.32)的特解为

$$\frac{T^2}{\alpha-\beta}\{(\alpha^{k-2}-\beta^{k-2})+2^2(\alpha^{k-3}-\beta^{k-3})+\cdots$$

$$+(k-2)^2(\alpha-\beta)\}$$

$$=\frac{T^2}{\alpha-\beta}(P-Q) \tag{13.33}$$

其中我们令

$$P=(k-2)^2\alpha+(k-3)^2\alpha^2+\cdots+2^2\alpha^{k-3}+\alpha^{k-2} \quad @$$

$$Q=(k-2)^2\beta+(k-3)^2\beta^2+\cdots+2^2\beta^{k-3}+\beta^{k-2}$$

我们来把P及Q化为封闭形。以a乘ⓐ，可有

$$aP=(k-2)^2a^2+\cdots+3^2a^{k-3}+2^2a^{k-2}+a^{k-1} \quad ⓑ$$

ⓐ及ⓑ按同幂项相减，可有

$$(1-a)P=(k-2)^2a-(2k-5)a^2-\cdots-5a^{k-3}-3a^{k-2}-a^{k-1}$$

$$=(k-2)^2a-S \quad ⓒ$$

其中我们令

$$S=(2k-5)a^2+(2k-7)a^3+\cdots+3a^{k-2}+a^{k-1}$$

今 $aS=(2k-5)a^3+\cdots+5a^{k-2}+3a^{k-1}+a^k$

两式按同幂项相减，可有

$$(1-a)S=(2k-5)a^2-2a^3-\cdots-2a^{k-2}-2a^{k-1}-a^k$$

故如果$a\neq1$，则

$$(1-a)S=(2k-5)a^2-2\frac{a^3-a^k}{1-a}-a^k$$

$$=(2k-5)a^2-\frac{2a^3-a^k-a^{k+1}}{1-a}$$

于是

$$S=\frac{(2k-5)a^2}{1-a}-\frac{2a^3-a^k-a^{k+1}}{(1-a)^2}$$

代入ⓒ可得

$$P=(k-2)^2\frac{a}{1-a}-\frac{(2k-5)a^2}{(1-a)^2}+\frac{2a^3-a^k-a^{k+1}}{(1-a)^3}$$

换a为β得

$$Q=(k-2)^2\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{(2k-5)B^2}{(1-B)^2}+\frac{2\beta^3-\beta^k-\beta^{k+1}}{(1-\beta)^3}$$

其中$a\neq1$，$\beta\neq1$，（从而$1+a+b\neq0$）。

由于含α^k，β^k，α^{k+1}，β^{k+1}之项已包括在补函数中，故按(13.33)我们可有(13.32)的一个特解：

$$
\begin{aligned}
&\frac{T^2}{\alpha-\beta}\left\{(k-2)^2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{\beta}{1-\beta}\right)\right.\\
&\qquad -(2k-5)\left[\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}-\frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}\right]\\
&\qquad \left.+2\left[\frac{\alpha^3}{(1-\alpha)^3}-\frac{\beta^3}{(1-\beta)^3}\right]\right\}\\
&=T^2\left\{\frac{(k-2)^2}{(1-\alpha)(1-\beta)}-(2k-5)\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^3}\right.\\
&\qquad \left.+2\,\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3\alpha^2\beta^2}{(1-\alpha)^3(1-\beta)^3}\right\}\\
&=T^2\left\{\frac{(k-2)^2}{1+a+b}+\frac{(2k-5)(a+2b)}{(1+a+b)^2}\right.\\
&\qquad \left.+2\,\frac{a^2-b+3ab+3b^2}{(1+a+b)^3}\right\}\\
&=T^2\left\{\frac{k^2}{1+a+b}-\frac{4(1+a+b)-2(a+2b)}{(1+a+b)^2}k\right.\\
&\qquad \left.+\frac{4(1+a+b)^2-5(a+2b)(1+a+b)+2(a^2-b+3ab+3b^2)}{(1+a+b)^3}\right\}\\
&=T^2\left\{\frac{k^2}{1+a+b}-\frac{(2a+4)k}{(1+a+b)^2}+\frac{a^2-ab+3a-4b+4}{(1+a+b)^3}\right\}
\end{aligned}
\tag{13.34}
$$

当然，这特解只在$1+a+b\neq 0$时能用。

(ii) 如果$1+a+b=0$，则$a=-(1+b)$，辅助方程

两根为 $\alpha=1$，$\beta=b$ 我们设 $b\neq 1$ 则

$$P=1^2+2^2+\cdots+(k-2)^2=(k-1)(k-2)(2k-3)/6$$
$$=(2k^3-9k^2+13k-6)/6$$

$$Q=(k-2)^2\frac{b}{1-b}-\frac{(2k-5)b^2}{(1-b)^2}+\frac{2b^3-b^k-b^{k+1}}{(1-b)^3}$$

由于含b^k之项，含 $b^{k+1}=b\cdot b^k$ 之项及常数项均已包括在补函数$C_1+C_2b^k$中，故按(13.33)，我们可取特解

$$\frac{T^2}{1-b}\left\{\frac{1}{6}(2k^3-9k^2+13k)-\frac{(k^2-4k)b}{1-b}+\frac{2kb^2}{(1-b)^2}\right\}$$

$$=\frac{T^2}{1-b}\left\{\frac{1}{3}k^3+\frac{(b-3)k^2}{2(1-b)}+\frac{b^2-2b+13}{6(1-b)^2}k\right\}$$

$$=T^2\left\{\frac{k^3}{3(1-b)}+\frac{(b-3)k^2}{2(1-b)^2}+\frac{(b^2-2b+13)k}{6(1-b)^3}\right\}\tag{13.35}$$

如果 $b=1$，则 $\alpha=1$，$\beta=1$，差分方程成为

$$x(kT+2T)-2x(kT+T)+x(kT)=(kT)^2$$

公式(13.6)不能用，可用(13.8)，特解为

$$T^2[1^2(k-2)+2^2(k-3)+\cdots+(k-3)^2 2+(k-2)^2 1]$$
$$=T^2\{1^2[(k-1)-1]+2^2[(k-1)-2]+\cdots+$$
$$+(k-3)^2[(k-1)-(k-3)]$$
$$+(k-2)^2[(k-1)-(k-2)^2]\}$$
$$=T^2\{(k-1)[1^2+2^2+\cdots+(k-2)^2]$$
$$-[1^3+2^3+\cdots+(k-2)^3]\}$$
$$=T^2\{(k-1)^2(k-2)(2k-3)/6-(k-1)^2(k-2)^2/4\}$$
$$=\frac{1}{12}T^2(k-1)^2(k-2)[2(2k-3)-3(k-2)]$$

$$=\frac{1}{12}T^2k(k-1)^2(k-2)$$

$$=\frac{1}{12}T^2(k^4-4k^3+5k^2-2k)$$

由于末项已含在补函数C_1+C_2k中，故可取特解

$$\frac{1}{12}T^2(k^4-4k^3+5k^2)$$

$$=\frac{1}{12}T^2k^2(k^2-4k+5) \tag{13.36}$$

另解，我们用待定系数法重新求（13.32）的特解。由于(13.23)的右端是k的二次式，我们设此方程有特解$T^2(Ak^2+Bk+C)$，其中A，B，C为待定系数。以此代入

$$x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)=(kT)^2$$

并消去T^2，可有

$$\left.\begin{array}{l} A(k+2)^2+B(k+2)+C \\ aA(k+1)^2+aB(k+1)+aC \\ \qquad\qquad +bAk^2+bBk+bC \end{array}\right\}\equiv k^2$$

故
$$A(1+a+b)=1$$
$$A(4+2a)+B(1+a+b)=0$$
$$A(4+a)+B(2+a)+C(1+a+b)=0$$

设 $1+a+b\neq 0$，则由此可解得

$$A=\frac{1}{1+a+b}$$

$$B=-\frac{4+2a}{(1+a+b)^2}$$

$$C=\frac{-1}{1+a+b}\left\{\frac{4+a}{1+a+b}-\frac{(2+a)(4+2a)}{(1+a+b)^2}\right\}$$

$$=\frac{(a+2)(2a+4)-(a+4)(a+b+1)}{(1+a+b)^3}$$

$$=\frac{a^2-ab+3a-4b+4}{(1+a+b)^3}$$

故得特解

$$T^2\left\{\frac{k^2}{1+a+b}-\frac{(2a+4)k}{(1+a+b)^2}+\frac{a^2-ab+3a-4b+4}{(1+a+b)^3}\right\}$$

同(13.34)

若 $1+a+b=0$，即 $a=-(1+b)$，则差分方程成为

$$x(kT+2T)-(1+b)x(kT+T)+bx(kT)=(kT)^2 \tag{13.37}$$

若 $b\neq 1$，则补函数为$C_1+C_2b^k$。如果仍设特解

$$T^2(Ak^2+Bk+C)$$

则第三项为补函数中之项，不能解决问题。我们设特解

$$T^2(Ak^2+Bk+C)k=T^2(Ak^3+Bk^2+Ck)$$

代入(13.37)，消去T^2，可有

$$\left.\begin{aligned}&A(k+2)^3+B(k+2)^2+C(k+2)\\&-(1+b)[A(k+1)^3+B(k+1)^2+C(k+1)]\\&\qquad+b(Ak^3+Bk^2+Ck)\end{aligned}\right\}\equiv k^2$$

即

$$\left.\begin{aligned}&3A(1-b)k^2+[3A(3-b)+2B(1-b)]k\\&\quad+A(7-b)+B(3-b)+C(1-b)\end{aligned}\right\}\equiv k^2$$

故 $3A(1-b)=1 \quad 3A(3-b)+2B(1-b)=0$

$A(7-b)+B(3-b)+C(1-b)=0$

由此得

$$A=\frac{1}{3(1-b)}\qquad B=\frac{b-3}{2(1-b)^2}$$

$$C=\frac{1}{1-b}\left\{\frac{b-7}{3(1-b)}+\frac{(b-3)^2}{2(1-b)^2}\right\}=\frac{b^2-2b+13}{6(1-b)^3}$$

故方程(13.37)在 $b\neq 1$ 时的特解为

$$T^2\left\{\frac{k^3}{3(1-b)}+\frac{(b-3)k^2}{2(1-b)^2}+\frac{(b^2-2b+13)k}{6(1-b)^3}\right\}$$

同(13.35)

若 $b=1$，则 $a=-(1+b)=-2$，差分方程为

$$x(kT+2T)-2x(kT+T)+x(kT)=(kT)^2 \quad (13.38)$$

补函数为C_1+C_2k。我们设(13.38)的特解为

$$T^2(Ak^2+Bk+C)k^2=T^2(Ak^4+Bk^3+Ck^2)$$

代入(13.38)并消去T^2，可有

$$\left.\begin{aligned}&A(k+2)^4+B(k+2)^3+C(k+2)^2\\&-2A(k+1)^4-2B(k+1)^3-2C(k+1)^2\\&+Ak^4+Bk^3+Ck^2\end{aligned}\right\}\equiv k^2$$

即

$$12Ak^2+(24A+6B)k+(14A+6B+2C)\equiv k^2$$

从而$12A=1$，$24A+6B=0$，$14A+6B+2C=0$

于是 $A=1/12$

$B=-4/12$

$C=-7A-3B=5/12$

故方程(13.38)的一特解为

$$\frac{1}{12}T^2(k^4-4k^3+5k^2)=\frac{1}{12}T^2k^2(k^2-4k+5)$$

同(13.36)。

例5. $x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)$
$=\mu^k\cos(\omega kT)$

$y(kT+2T)+ay(kT+T)+by(kT)$
$=\mu^k\sin(\omega kT)$

解 写$w=x+jy$ 则

$$w(kT+2T)+aw(kT+T)+bw(kT)=\mu^k e^{j\omega kT}$$
$$=(\mu e^{j\omega T})^k$$

显然，把例1的μ换为$\mu e^{j\omega T}$就给出这个w—方程。因此，如果$\mu e^{j\omega T}$不是辅助方程

$$r^2+ar+b=0$$

的根，那末按(13.9)，w—方程的一个特解为

$$\frac{\mu^k e^{j\omega kT}}{\mu^2 e^{2j\omega T}+a\mu e^{j\omega T}+b}$$

$$=\frac{\mu^k e^{j\omega kT}(\mu^2 e^{-2j\omega T}+a\mu e^{-j\omega T}+b)}{(\mu^2 e^{2j\omega T}+a\mu e^{j\omega T}+b)(\mu^2 e^{-2j\omega T}+a\mu e^{-j\omega T}+b)}$$

$$=\frac{\mu^k[e^{j(k-2)\omega T}+a\mu e^{j(k-1)\omega T}+be^{jk\omega T}]}{\mu^4+a^2\mu^2+b^2+2a\mu(\mu^2+b)\cos\omega T+2b\mu^2\cos(2\omega T)}$$

分开实部及虚部得x—方程及y—方程的特解，依次为

$$\frac{\mu^k\{\mu^2\cos[(k-2)\omega T]+a\mu\cos[(k-1)\omega T]+b\cos(k\omega T)\}}{\mu^4+a^2\mu^2+b^2+2a\mu(\mu^2+b)\cos\omega T+2b\mu^2\cos(2\omega T)}$$

及

$$\frac{\mu^k\{\mu^2\sin[(k-2)\omega T]+a\mu\sin[(k-1)\omega T]+b\sin(k\omega T)\}}{\mu^4+a^2\mu^2+b^2+2a\mu(\mu^2+b)\cos\omega T+2b\mu^2\cos(2\omega T)}$$

若 $\mu e^{j\omega T}$ 为辅助方程 $r^2+ar+b=0$ 的根，则两根为 $\mu e^{\pm j\omega T}$。此时差分方程为

$$w(kT+2T)-2\mu\cos\omega T\cdot w(kT+T)+\mu^2 w(kT)$$
$$=(\mu e^{j\omega T})^k$$

求特解，(13.9)不能用。我们用(13.10)，此 w —方程的一个特解为

$$\frac{k(\mu e^{j\omega T})^{k-1}}{2j\mu\sin\omega T}$$

$$=\frac{k\mu^{k-2}\{\cos[(k-1)\omega T]+j\sin[(k-1)\omega T]\}}{2j\sin\omega T}$$

分开实部及虚部得

$$x(kT+2T)-2\mu\cos\omega Tx(kT+T)+\mu^2x(kT)$$
$$=\mu^k\cos(\omega kT)$$

及 $$y(kT+2T)-2\mu\cos\omega Ty(kT+T)+\mu^2y(kT)$$
$$=\mu^k\sin(\omega kT)$$

的特解依次为

$$\frac{k\mu^{k-2}\sin[(k-1)\omega T]}{2\sin\omega T} \quad 及 \quad -\frac{k\mu^{k-2}\cos[(k-1)\omega T]}{2\sin\omega T}$$

加上同一补函数

$$\mu^k\{C_1\cos(\omega kT)+C_2\sin(\omega kT)\}$$

即得它们的通解。

例6. $x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)=Tk\mu^k$

解 $f(kT)=Tk\mu^k$ 以 α 及 β 表示 $r^2+ar+b=0$ 的两根。按(13.6)，特解为

$$\frac{T}{\alpha-\beta}\{\mu(\alpha^{k-2}-\beta^{k-2})+2\mu^2(\alpha^{k-3}-\beta^{k-3})+\cdots+$$

$$+(k-2)\mu^{k-2}(\alpha-\beta)\}$$

$$=\frac{T}{\alpha+\beta}(P-Q)$$

其中我们乃令

$$P=\mu\alpha^{k-2}+2\mu^2\alpha^{k-3}+\cdots+(k-2)\mu^{k-2}\alpha$$

$$Q=\mu\beta^{k-2}+2\mu^2\beta^{k-3}+\cdots+(k-2)\mu^{k-2}\beta$$

我们把P及Q化为封闭式。显然

$$P=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(\mu\alpha^{k-2}+\mu^2\alpha^{k-3}+\cdots+\mu^{k-2}\alpha)$$

故在$\mu\neq\alpha$时

$$P=\mu\frac{\partial}{\alpha\mu}\frac{\alpha\mu^{k-1}-\mu\alpha^{k-1}}{\mu-\alpha}$$

$$=\mu\frac{(\mu-\alpha)[k-1)\alpha\mu^{k-2}-\alpha^{k-1}]-\alpha\mu^{k-1}+\mu\alpha^{k-1}}{(\mu-\alpha)^2}$$

$$=\frac{(k-2)\alpha\mu^k-(k-1)\alpha^2\mu^{k-1}+\mu\alpha^k}{(\mu-\alpha)^2}$$

同样，在$\mu\neq\beta$时，

$$Q=\frac{(k-2)\beta\mu^k-(k-1)\beta^2\mu^{k-1}+\mu\beta^k}{(\mu-\beta)^2}$$

由于含α^k及β^k之项已包含在补函数$C_1\alpha^k+C_2\beta^k$中，故可取特解（在$\mu\neq\alpha$，$\mu\neq\beta$）

$$\frac{T}{\alpha-\beta}\left\{(k-2)\mu^k\left[\frac{\alpha}{(\mu-\alpha)^2}-\frac{\beta}{(\mu-\beta)^2}\right]\right.$$

$$-(k-1)\mu^{k-1}\left[\frac{\alpha^2}{(\mu-\alpha)^2}-\frac{\beta^2}{(\mu-\beta)^2}\right]\Bigg\}$$

$$=T\Bigg\{(k-2)\mu^k\cdot\frac{\mu^2-\alpha\beta}{(\mu-\alpha)^2(\mu-\beta)^2}$$

$$-(k-1)\mu^{k-1}\cdot\frac{\mu^2(\alpha+\beta)-2\mu\alpha\beta}{(\mu-\alpha)^2(\mu-\beta)^2}\Bigg\}$$

$$=T\Bigg\{(k-2)\mu^k\cdot\frac{\mu^2-b}{(\mu^2+a\mu+b)^2}$$

$$+(k-1)\mu^{k-1}\cdot\frac{a\mu^2+2b\mu}{(\mu^2+a\mu+b)^2}\Bigg\}$$

$$=T\left\{\frac{k}{\mu^2+a\mu+b}-\frac{2\mu^2+a\mu}{(\mu^2+a\mu+b)^2}\right\}\mu^k \qquad (13.39)$$

此结果只要求$\mu^2+a\mu+b\neq 0$，即μ不是辅助方程之根。注意，$\alpha-\beta$最后消去，所以这结果对$\alpha=\beta$的情况也适用。又注意在$\mu=1$时，此为(13.25)

若$\mu^2+a\mu+b=0$，则可认为$\mu=\alpha\,(\neq\beta)$此时

$$P=\alpha^{k-1}[1+2+3+\cdots+(k-2)]=\alpha^{k-1}(k-1)(k-2)/2$$

$$Q=\frac{(k-2)\beta\alpha^k-(k-1)\beta^2\alpha^{k-1}+\alpha\beta^k}{(\alpha-\beta)^2}$$

补函数仍为$C_1\alpha^k+C_2\beta^k$，差分方程右端为$Tk\alpha^k$，不计$\dfrac{T}{\alpha-\beta}(P-Q)$中含在补函数中之项，可取特解

$$\frac{T}{a-\beta}\left\{\frac{1}{2}a^{k-1}(k^2-3k)-\frac{k\beta a^k-k\beta^2a^{k-1}}{(a-\beta)^2}\right\}$$

$$=\frac{T}{a-\beta}\left\{\frac{1}{2}a^{k-1}(k^2-3k)-\frac{k\beta a^{k-1}}{a-\beta}\right\}$$

$$=T\left\{\frac{k^2}{2(a-\beta)}-\frac{k(3a-\beta)}{2(a-\beta)^2}\right\}a^{k-1} \qquad (13.40)$$

注意，若 $\mu=a=1$，则 $\beta=b$，此成为(13.26).

若 $\mu=a=\beta$，则差分方程成为

$$x(kT+2T)-2ax(kT+T)+a^2x(kT)=Tka^k$$

补函数为 $(C_1+C_2k)a^k$ 由(13.8)得特解

$$T[a(k-2)a^{k-3}+2a^2(k-3)a^{k-4}+\cdots$$
$$+(k-3)a^{k-3}\cdot 2a+(k-2)a^{k-2}]$$
$$=Ta^{k-2}[1\cdot(k-2)+2(k-3)+\cdots+(k-3)2+(k-2)\cdot 1]$$

在本节例 3 解之末，我们已得

$$1(k-2)+2(k-3)+\cdots+(k-3)2+(k-2)\cdot 1$$
$$=k(k-1)(k-2)/6$$ 故可有特解

$$Ta^{k-2}k(k-1)(k-2)/6$$

不计含在补函数中之项，可取特解

$$Ta^{k-2}k^2(k-3)/6 \qquad (13.41)$$

另解．我们用待定系数法求

$$x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)=Tk\mu^k \qquad (13.42)$$

的特解。由于右端是k的一次式乘 μ^k，我们设特解如 $T(Ak+B)\mu^k$，其中A及B为待定常数。以之代入 (13.42) 并消去 $T\mu^k$，可有

$$\left.\begin{aligned}&[A(k+2)+B]\mu^2\\&\quad+a[A(k+1)+B]\mu\\&\quad+b[Ak+B]\end{aligned}\right\}\equiv k$$

即 $A(\mu^2+a\mu+b)k+A(2\mu^2+a\mu)+B(\mu^2+a\mu+b)\equiv k$

故 $A(\mu^2+a\mu+b)=1 \quad A(2\mu^2+a\mu)+B(\mu^2+a\mu+b)=0$

如果$\mu^2+a\mu+b\neq 0$ 则 $A=1/(\mu^2+a\mu+b)$

$$B=-(2\mu^2+a\mu)/(\mu^2+a\mu+b)^2$$

于是得特解

$$T\left[\frac{k}{\mu^2+a\mu+b}-\frac{2\mu^2+a\mu}{(\mu^2+a\mu+b)^2}\right]\mu^k$$ 同(13.39)。

若$\mu^2+a\mu+b=0$，则设特解如

$$T(Ak^2+Bk)\mu^k$$

代入(13.42)并消去$T\mu^k$，可有

$$\left.\begin{aligned}&[A(k+2)^2+B(k+2)]\mu^2\\&\quad+a[A(k+1)^2+B(k+1)]\mu\\&\quad+b[Ak^2+Bk]\end{aligned}\right\}\equiv k$$

即 $A(4\mu^2+2a\mu)k+A(4\mu^2+a\mu)+B(2\mu^2+a\mu)\equiv k$

故 $A(4\mu^2+2a\mu)=1 \quad A(4\mu^2+a\mu)+B(2\mu^2+a\mu)=0$

于是

$$A=\frac{1}{2\mu(2\mu+a)}$$

$$B=\frac{-(4\mu+a)}{2\mu(2\mu+a)^2}$$ （在$2\mu+a\neq 0$）

特解为 $T\left\{\frac{k^2}{2(2\mu+a)}-\frac{(4\mu+a)k}{2(2\mu+a)^2}\right\}\mu^{k-1}$

显然此同(13.40)。事实上，条件$\mu^2+a\mu+b=0$说明我们可以认为$\mu=\alpha$，而$2\mu+a\neq0$说明$2\mu+a=2\alpha-(\alpha+\beta)=\alpha-\beta\neq0$上之特解可直接写成

$$T\left\{\frac{k^2}{2(\alpha-\beta)}-\frac{(3\alpha-\beta)k}{2(\alpha-\beta)^2}\right\}\alpha^{k-1}$$

此即(13.40)。

若$\mu^2+a\mu+b=0$且$2\mu+a=0$，则$\mu=\alpha=\beta$差分方程为

$$x(kT+2T)-2\alpha x(kT+T)+\alpha^2x(kT)=Tk\alpha^k \quad (13.43)$$

补函数为$(C_1+C_2k)\alpha^k$，我们设特解如

$$T(Ak^3+Bk^2)\alpha^k$$

以之代入(13.43)并消去$T\alpha^k$，可有

$$\left.\begin{aligned}&[A(k+2)^3+B(k+2)^2]\alpha^2\\&\quad-2\alpha[A(k+1)^3+B(k+1)^2]\alpha\\&\quad+\alpha^2[Ak^3+Bk^2]\end{aligned}\right\}\equiv k$$

即 $6A\alpha^2k+(6A+2B)\alpha^2\equiv k$

于是 $6A\alpha^2=1$，$3A+B=0$，从而 $A=\frac{1}{6\alpha^2}$，$B=-\frac{1}{2\alpha^2}$

特解为$T\left(\frac{1}{6}k^3-\frac{1}{2}k^2\right)\alpha^{k-2}=\frac{T}{6}k^2(k-3)\alpha^{k-2}$ 同(13.41)。

§ 14 带右端项的n阶常系数线性差分方程的解

考察n阶常系数线性差分方程（带右端项的）：

$$a_0 x(kT+nT)+a_1 x(kT+nT-T)$$
$$+a_2 x(kT+nT-2T)+\cdots+a_{n-1}x(kT+T)$$
$$+a_n x(kT)=f(kT) \qquad (14.1)$$

这方程的通解等于补函数加特解。补函数即此方程右端恒为0时的通解。它已在§11给出，此处不再重复。我们现在研究如何求方程(14.1)的一个特解。我们仍按(14.1)的各项取z变换。为简捷起见，也是由于只求特解，我们可取$x(0)=x(T)=x(2T)=\cdots=x(nT-T)=0$．并取$a_0=1$（这并不失去其普遍性。如果$a_0\neq 1$，除以$a_0$）。于是按(14.1)各项取$z$变换，并利用§6性质（三）的第二式，可有

$$z^n X(z)+a_1 z^{n-1}X(z)+\cdots+a_{n-1}zX(z)$$
$$+a_n X(z)=F(z)$$

于是

$$X(z)=\frac{1}{z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n}F(z) \qquad (14.2)$$

其中，$X(z)=Z[x(kT)]$　$F(z)=Z[f(kT)]$

以$z_i(i=1,2,\cdots)$表示(14.2)分母的不同的零点，则由§7的(7.6)，可见

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n}\right]=\psi(kT)$$

而

$$\psi(kT)=\begin{cases}\sum_i \operatorname{res}_{z_i}\dfrac{z^{k-1}}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n} & 在 k\geqslant 1\\ 0 & 在 k=0\end{cases} \tag{14.3}$$

于是(14.2)可写成

$$X(z)=Z[\psi(kT)]Z[f(kT)]=Z[(\psi*f)(kT)]$$

从而

$$x(kT)=(\psi*f)(kT) \tag{14.4}$$

即为所求特解。

我们讨论两个特殊情形。

(i) 设$z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_0=0$的$n$个根$\alpha_1$, α_2, $\cdots$, α_n彼此不等

$$\operatorname{res}_{\alpha_1}\frac{z^{k-1}}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}=\left.\frac{z^{k-1}}{(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}\right|_{z=\alpha_1}$$

$$=K_1\alpha_1^{k-1}$$

$$K_1=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$\operatorname{res}_{\alpha_2}\frac{z^{k-1}}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}=K_2\alpha_2^{k-1}$$

$$K_2=\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{res}_{\alpha_n}\frac{z^{k-1}}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}=K_n\alpha_n^{k-1}$$

$$K_n = \frac{1}{(\alpha_n - \alpha_1)\cdots(\alpha_n - \alpha_{n-1})}$$

代入(14.3)得

$$\psi(kT) = \begin{cases} K_1\alpha_1^{k-1} + K_2\alpha_2^{k-1} + \cdots + K_n\alpha_n^{k-1} & 在 k \geqslant 1 \\ 0 & 在 k = 0 \end{cases} \tag{14.5}$$

于是由(14.4)，所求特解为

$$\begin{aligned} x(kT) &= (\psi * f)(kT) \\ &= \psi(0)f(kT) + \psi(T)f(kT-T) + \cdots + \\ &\quad + \psi(kT)f(0) \\ &= (K_1 + K_2 + \cdots + K_n)f(kT-T) \\ &\quad + (K_1\alpha_1 + K_2\alpha_2 + \cdots + K_n\alpha_n)f(kT-2T) \\ &\quad + \cdots\cdots \\ &\quad + (K_1\alpha_1^{k-1} + K_2\alpha_2^{k-1} + \cdots + K_n\alpha_n^{k-1})f(0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} K_i\{(kT-T) + \alpha_i f(kT-2T) \\ &\quad + \alpha_i^2 f(kT-3T) + \cdots + \alpha_i^{k-1}f(0)\} \end{aligned} \tag{14.6}$$

注意，(14.5)中的 $\psi(kT)$ 亦可借助于部分分式得出。事实上

$$\frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}$$

$$= \frac{K_1}{z-\alpha_1} + \frac{K_2}{z-\alpha_2} + \cdots + \frac{K_n}{z-\alpha_n}$$

其中 K_1，K_2，…，K_n 的表达式如上。由§12的(12.4)可有

$$Z^{-1}\left[\frac{K_1}{z-a_1}\right]=\begin{cases}K_1 a_1^{k-1} & 在 k\geqslant 1\\ 0 & 在 k=0\end{cases}$$

对于其他各项亦有类似结果。相加即得 $\psi(kT)$ 如(14.5)

(ii) $z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=(z-a)^n$

$$\underset{a}{\text{res}}\frac{z^{k-1}}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}$$

$$=\underset{a}{\text{res}}\frac{z^{k-1}}{(z-a)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^{k-1})\right]_{z=a}$$

$$=\begin{cases}0, & 在 k=1,2,\cdots,n-1\\ \dfrac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}a^{k-n} & 在 k\geqslant n\end{cases}$$

由(14.3)得

$$\psi(kT)=\begin{cases}0, & 在 k=0,1,2,\cdots,n-1\\ \dfrac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}a^{k-n} & 在 k\geqslant n\end{cases}$$

此 $\psi(kT)$ 亦可借助于 z 的负幂级数得出：

$$\frac{1}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}$$

$$=\frac{1}{(z-a)^n}=\frac{1}{z^n}\left(1-\frac{a}{z}\right)^{-n}$$

$$=\frac{1}{z^n}\left(1+n\frac{a}{z}+\frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{z^2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}\frac{a^r}{z^r}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^n}+n\frac{a}{z^{n+1}}+\frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{z^{n+2}}+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}\frac{a^r}{z^{n+r}}+\cdots$$

显然，在 $k=0,1,\cdots,n-1$ 时，此展式中 $1/z^k$ 之系数均为0，在 $k=n$ 时，$1/z^k$ 之系数为1，在 $k>n$ 时，含 $1/z^k$ 之项出现于 $r=k-n$ 时故 $1/z^k$ 之系数为

$$\frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}a^{k-n}=\frac{(k-1)(k-2)\cdots n}{(k-n)!}a^{k-n}$$

故

$$\psi(kT)=\begin{cases}0 & 在\ k=0,1,\cdots,n-1\\ 1 & 在\ k=n\\ \dfrac{(k-1)(k-2)\cdots n}{(k-n)!} & 在\ k\geqslant n+1\end{cases}\qquad ⓑ$$

容易证明ⓑ及@恒同，事实上，在 $k\geqslant n+1$ 时，

$$\frac{(k-1)(k-2)\cdots n}{(k-n)!}$$

$$=\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)\cdots(n+1)n}{1\cdot 2\cdots(n-1)n(n+1)\cdots(k-n)}$$

$$=\frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n-1)!}$$ ［即ⓑ恒同于@］ ⓒ

注意ⓑ亦可写成

$$\psi(kT)=\begin{cases}0 & 在\ k=0,1,\cdots,n-1\\ 1 & 在\ k=n\\ \dfrac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}a^{k-n} & 在\ k\geqslant n+1\end{cases}$$

利用 $\psi(kT)$的这个形式，最后得特解

$$
\begin{aligned}
x(kT) &= (\psi * f)(kT) \\
&= \psi(0)f(kT) + \psi(T)f(kT-T) \\
&\quad + \cdots + \psi(kT)f(0) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{在 } k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ f(kT-nT) + n\alpha f(kT-nT-T) \end{cases} \\
&\quad + \frac{n(n+1)}{2!}\alpha^2 f(kT-nT-2T) + \cdots \\
&\quad + \frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}\alpha^{k-n} f(0) \quad \text{在 } k \geqslant n
\end{aligned}
\tag{14.7}
$$

例1.
$$
\begin{aligned}
&x(kT+nT) + a_1 x(kT+nT-T) + \cdots \\
&+ a_{n-1} x(kT+T) + a_n x(kT) = \mu^k
\end{aligned}
\tag{14.8}
$$

并且辅助方程的 n 个根α_1，α_2，…，α_n彼此不等。

解 $f(kT) = \mu^k$ 代入(14.6)可得特解

$$
\begin{aligned}
x(kT) &= \sum_{i=1}^{n} K_i(\mu^{k-1} + \alpha_i \mu^{k-2} + \alpha_i^2 \mu^{k-3} \\
&\quad + \cdots + \alpha_i^{k-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} K_i \frac{\mu^k - \alpha_i^k}{\mu - \alpha_i} \quad \text{在 } \mu \neq \alpha_i \text{时}
\end{aligned}
$$

条件$\mu \neq \alpha_i$意味着μ不是辅助方程之根，即

$$
\mu^n + a_1 \mu^{n-1} + \cdots + a_n \neq 0
$$

由于含 α_i^k之项已包含在补函数中，故在$\mu \neq \alpha_i$时，可取特解

$$
\sum_{i=1}^{n} K_i \frac{\mu^k}{\mu - \alpha_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{\mu - \alpha_i} \right) \mu^k
$$

$$= \frac{\mu^k}{\mu^n + a_1\mu^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{14.9}$$

(左端的和式是右端的部分分式展开式)。

另解. 由(14.9)的启发，我们设差分方程(14.8)有一特解如 $A\mu^k$，其中 A 为待定常数。代入(14.8)，可有

$$A(\mu^{k+n} + a_1\mu^{k+n-1} + \cdots + a_{n-1}\mu^{k+1} + a_n\mu^k) = \mu^k$$

即 $$A(\mu^n + a_1\mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mu + a_n) = 1 \tag{14.10}$$

如果 $$P(\mu) \equiv \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mu + a_n \neq 0 \tag{14.11}$$

我们可自(14.10)解得 $A = 1/P(\mu)$，从而得特解

$$\mu^k/P(\mu) \tag{14.12}$$

同(14.9)。条件 (14.11) 表明 μ 不是辅助方程 $P(z) = 0$ 之根。注意，(14.12)的得出不需要假定 $P(z) = 0$ 的 n 个根全不相等，而(14.9)则是在这种假定下得到的。

如果 μ 为 $P(z)$ 的单根（一重根），即 $P(\mu) = 0$，但

$$P'(\mu) = n\mu^{n-1} + (n-1)a_1\mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \neq 0$$

则(14.10) 不能成立。我们可设 (14.8) 的特解为 $Ak\mu^k$，其中 A 为待定常数。以之代入(14.8)，得

$$A[(k+n)\mu^{k+n} + a_1(k+n-1)\mu^{k+n-1} + \cdots$$
$$+ a_{n-1}(k+1)\mu^{k+1} + a_n k\mu^k] = \mu^k$$

即 $A[kP(\mu) + \mu P'(\mu)] = 1$ 亦即 $A\mu P'(\mu) = 1$

从而 $$A = \frac{1}{\mu P'(\mu)}$$

于是得特解 $$\frac{k\mu^{k-1}}{P'(\mu)} \tag{14.13}$$

如果 μ 为辅助方程 $P(z) = 0$ 的二重根，即

$$P(\mu) = \mu^n + a_1\mu^{n-1} + \cdots + a_{n-2}\mu^2 + a_{n-1}\mu + a_n = 0$$

$$P'(\mu)=n\mu^{n-1}+(n-1)a_1\mu^{n-2}+\cdots$$
$$+2a_{n-2}\mu+a_{n-1}=0$$

但 $$P''(\mu)=n(n-1)\mu^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1\mu^{n-3}+\cdots$$
$$+2a_{n-2}\neq 0$$

则(14.13)没有意义。我们设(14.8)的特解为$Ak^2\mu^k$，其中A为待定常数。以此解代入(14.8)，可有

$$A[(k+n)^2\mu^{k+n}+a_1(k+n-1)^2\mu^{k+n-1}+\cdots$$
$$+a_{n-2}(k+2)^2\mu^{k+2}+a_{n-1}(k+1)^2\mu^{k+1}$$
$$+a_nk^2\mu^k]=\mu^k$$

消去μ^k，可有

$$A[k^2P(\mu)+2k\mu P'(\mu)+\{n^2\mu^n+a_1(n-1)^2\mu^{n-1}+\cdots$$
$$+a_{n-2}2^2\mu^2+a_{n-1}1^2\mu\}]=1$$

即 $$A[k^2P(\mu)+2k\mu P'(\mu)+\{\mu P'(\mu)$$
$$+\mu^2P''(\mu)\}]=1$$

亦即 $$A[k^2P(\mu)+(2k+1)\mu P'(\mu)+\mu^2P''(\mu)]=1$$

但题设$P(\mu)=0$，$P'(\mu)=0$，$P''(\mu)\neq 0$，故

$$A=\frac{1}{\mu^2P''(\mu)}$$

特解为 $$\frac{k^2\mu^{k-2}}{P''(\mu)} \tag{14.14}$$

注意：取$n=2$，这里的(14.12)，(14.13)，(14.14)，即分别成为§13中的(13.9)末项，(13.10)末项，(13.15)末项。

例2. $$x(kT+nT)+a_1x(kT+nT-T)+\cdots$$
$$+a_{n-1}x(kT+T)+a_nx(kT)=\mu^k$$

并且辅助方程的n个根全相等为a。

解　辅助方程为$P(z)\equiv(z-a)^n=0$

施用z变换于所给方程，并假定 $x(0)=x(T)=\cdots=x(nT-T)=0$　可有

$$(z-a)^n X(z)=Z[\mu^k]=z/(z-\mu)$$

于是

$$X(z)=\frac{z}{(z-a)^n(z-\mu)}$$

若$\mu\neq a$则

$$Z^{-1}[X(z)]=\underset{\mu}{\text{res}}\left[\frac{z^k}{(z-a)^n(z-\mu)}\right]$$

$$+\underset{a}{\text{res}}\left[\frac{z^k}{(z-a)^n(z-\mu)}\right]$$

$$=\left.\frac{z^k}{(z-a)^n}\right|_{z=\mu}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z^k}{z-\mu}\right)\right]_{z=a}$$

$$=\frac{\mu^k}{(\mu-a)^n}+\text{补函数中之项}$$

故可取特解　$\dfrac{\mu^k}{(\mu-a)^n}=\dfrac{\mu^k}{P(\mu)}$　同例1的(14.12)。

若$\mu=a$，则

$$X(z)=\frac{z}{(z-a)^{n+1}}$$

故得特解

$$x(kT)=Z^{-1}[X(z)]$$

$$=Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-a)^{n+1}}\right]$$

$$=\underset{a}{\text{res}}\left[\frac{z^k}{(z-a)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(z^k)\right]_{z=a}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{在 } k=0,1,2,\cdots,n-1\\ \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}a^{k-n} & \text{在 } k\geqslant n\end{cases} \tag{14.15}$$

注意，此情形属于上述特殊情形(ii)，$f(kT)=a^k$ 特解也可由(14.7)给出为

$$x(kT)=\begin{cases}0 & \text{在 } k=0,1,2,\ n-1\\ \left[1+n+\dfrac{n(n+1)}{2!}+\cdots+\dfrac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}\right]a^{k-n} & \text{在 } k\geqslant n\end{cases}$$

我们证明：此式可化成(14.15)，即有

$$1+n+\frac{n(n+1)}{2!}+\cdots+\frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\quad(k\geqslant n)\tag{*}$$

事实上，$k=n$，右端$=\dfrac{n(n-1)\cdots1}{n!}=1$，左端只有第一项1。

$$k=n+1,\quad 1+n=\frac{(n+1)n\cdots2}{n!}$$

$$k=n+2,\quad 1+n+\frac{n(n+1)}{2!}=\frac{(n+2)(n+1)n\cdots3}{n!}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

我们用归纳法完成证明。将上之(*)两端各加

$$\frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!}$$

可有
$$1+n+\frac{n(n+1)}{2!}+\cdots+\frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!}$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}+\frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!}$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}+\frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}$$

(由情形(ii)的ⓒ)

$$=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-n+2)}{n!}$$

将此等式左边的 k 换为 $k+1$，即得(*)，故得证。

例3. $x(kT+nT)+a_1x(kT+nT-T)+\cdots$

$$+a_{n-1}x(kT+T)+a_nx(kT)=kT$$

解 $f(kT)=kT$。假定辅助方程的 n 个根 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 全不相等。应用(14.6)可有特解

$$T\sum_{i=1}^{n}K_i\{(k-1)+\alpha_i(k-2)+\alpha_i^2(k-3)+\cdots$$

$$+\alpha_i^{k-2}1\}$$

我们把{　}中的式子化为封闭式。写

$$S=(k-1)+a(k-2)+a^2(k-3)+\cdots+a^{k-2}1$$

则 $\quad aS= \qquad a(k-1)+a^2(k-2)+\cdots+a^{k-2}\cdot 2+a^{k-1}$

故 $\quad (1-a)S=k-1-a-a^2-\cdots-a^{k-2}-a^{k-1}$

如果 $a\neq 1$ 则 $\quad (1-a)S=k-\dfrac{1-a^k}{1-a}$

从而 $$S=\frac{k}{1-a}-\frac{1-a^k}{(1-a)^2}$$

于是在$\alpha_i\neq 1$时，可有特解

$$T\sum_{i=1}^{n}K_i\left\{\frac{k}{1-\alpha_i}-\frac{1-\alpha_i^k}{(1-\alpha_i)^2}\right\}$$

由于含 α_i^k之项已包括在补函数中，故可取特解（在 $\alpha_1\neq 1$时）

$$T\sum_{i=1}^{n}K_i\left\{\frac{k}{1-\alpha_i}-\frac{1}{(1-\alpha_i)^2}\right\}$$

$$=T\left\{k\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{1-\alpha_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{(1-\alpha_i)^2}\right\} \tag{14.16}$$

条件$\alpha_i=1$表明1不是辅助方程

$$P(z)\equiv z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根，即

$$P(1)=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n\neq 0 \tag{14.17}$$

在此条件下，我们能将特解(14.16)用系数$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$，$a_n$表出。注意 K_i 是

$$\frac{1}{P(z)}=\frac{1}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)}$$

展开为部分分式和的系数（在所有α_i全不相等的情形），即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{z-\alpha_i}=\frac{1}{P(z)}$$

将此恒等式对 z 求导数，并变号，可有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(z-a_i)^2} = \frac{P'(z)}{[P(z)]^2}$$

于此两恒等式中令 $z=1$，可有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{1-a_i} = \frac{1}{P(1)} \tag{a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(1-a_i)^2} = \frac{P'(1)}{[P(1)]^2} \tag{b}$$

其中 $P(1)$ 如(14.17)，而

$$\begin{aligned} P'(1) &= [nz^{n-1} + a_1(n-1)z^{n-2} \\ &\quad + a_2(n-2)z^{n-3} + \cdots + a_{n-1}]_{z=1} \\ &= n + a_1(n-1) + a_2(n-2) + \cdots + a_{n-1} \end{aligned} \tag{14.18}$$

将(a).(b)代入(14.16)得特解

$$T\left\{\frac{k}{P(1)} - \frac{P'(1)}{[P(1)]^2}\right\} \tag{14.19}$$

另解　用待定系数法。设特解为 $T(Ak+B)$，其中 A 及 B 为待定常数。代入原方程，可有

$$\begin{aligned} &[A(k+n)+B] + a_1[A(k+n-1)+B] \\ &\quad + a_2[A(k+n-2)+B] + \cdots \\ &\quad + a_{n-1}[A(k+1)+B] + a_n[Ak+B] \equiv k \end{aligned}$$

即

$$AkP(1) + AP'(1) + BP(1) \equiv k$$

其中 $P(1)$ 如(14.17)，$P'(1)$ 如(14.18)。于是

$$AP(1) = 1 \quad AP'(1) + BP(1) = 0$$

如果 $P(1) \neq 0$，可有

$$A=\frac{1}{P(1)} \qquad B=-\frac{P'(1)}{[P(1)]^2}$$

特解为

$$T(Ak+B)=T\left\{\frac{k}{P(1)}-\frac{P'(1)}{[P(1)]^2}\right\}$$

同(14.19)。特别，$n=2$，此成为(13.25)。

如果$P(1)=0$，则设特解 $T(Ak^2+Bk)$，A及B为待定常数。代入所给方程可有

$$\begin{aligned}&A(k+n)^2+B(k+n)\\&+a_1[A(k+n-1)^2+B(k+n-1)]\\&+a_2[A(k+n-2)^2+B(k+n-2)]\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+a_{n-1}[A(k+1)^2+B(k+1)]\\&+a_n[Ak^2+Bk]\\&\equiv k\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&Ak^2P(1)+2AkP'(1)+A[n^2+a_1(n-1)^2\\&+a_2(n-2)^2+\cdots+a_{n-1}1^2]+BkP(1)+BP'(1)\\&\equiv k\end{aligned}$$

计及条件$P(1)=0$，可见必有

$$2AP'(1)=1$$

$$\begin{aligned}&A[n^2+a_1(n-1)^2+a_2(n-2)^2+\cdots+a_{n-1}]\\&\quad+BP'(1)=0\end{aligned}$$

如果 $P'(1)\neq 0$，则可解得

$$A=\frac{1}{2P'(1)}$$

$$B = -\frac{n^2 + a_1(n-1)^2 + a_2(n-2)^2 + \cdots + a_{n-1}}{2[P'(1)]^2}$$

显然

$$\begin{aligned} & n^2 + a_1(n-1)^2 + a_2(n-2)^2 + \cdots + a_{n-1} \\ &= \left[\frac{d}{dz}\{zP'(z)\}\right]_{z=1} \\ &= [zP''(z) + P'(z)]_{z=1} \\ &= P''(1) + P'(1) \end{aligned}$$

将此结果代入 B 中，可见特解 $T(Ak^2 + Bk)$ 成为

$$T\left\{\frac{k^2}{2P'(1)} - \frac{P''(1) + P'(1)}{2[P'(1)]^2}k\right\} \tag{14.20}$$

其中 $P'(1)$ 如(14.18)，而

$$\begin{aligned} P''(1) = n(n-1) + a_1(n-1)(n-2) \\ + a_2(n-2)(n-3) + \cdots + a_{n-2}2 \end{aligned} \tag{14.21}$$

特别，$n = 2$，特解(14.20)给出(13.26)。

如果 $P(1) = 0$ 且 $P'(1) = 0$，则可设特解

$$T(Ak^3 + Bk^2)$$

其中 A 及 B 为待定常数。代入所给方程，并消去 T，可有

$$\begin{aligned} & A(k+n)^3 + B(k+n)^2 \\ & \quad + a_1[A(k+n-1)^3 + B(k+n-1)^2] \\ & \quad + a_2[A(k+n-2)^3 + B(k+n-2)^2] \\ & \quad + \cdots\cdots \\ & \quad + a_{n-1}[A(k+1)^3 + B(k+1)^2] \\ & \quad + a_n[Ak^3 + Bk^2] \\ & \equiv k \end{aligned}$$

即

$$
\begin{aligned}
&Ak^3P(1)+3Ak^2P'(1)\\
&\quad 3Ak[n^2+a_1(n-1)^2+a_2(n-2)^2+\cdots+a_{n-1}]\\
&\quad +A[n^3+a_1(n-1)^3+a_2(n-2)^3+\cdots\\
&\quad +a_{n-1}1^3]+Bk^2P(1)+2BkP'(1)\\
&\quad +B[n^2+a_1(n-1)^2+a_2(n-2)^2+\cdots+a_{n-1}]\\
&\equiv k
\end{aligned}
$$

已证

$$
\begin{aligned}
&n^2+a_1(n-1)^2+a_2(n-2)^2+\cdots+a_{n-1}\\
&=P''(1)+P'(1)
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
&n^3+a_1(n-1)^3+a_2(n-2)^3+\cdots+a_{n-1}\\
&=\left(\frac{d}{dz}\left\{z\frac{d}{dz}[zP'(z)]\right\}\right)\bigg|_{z=1}\\
&=\left(\frac{d}{dz}\{z^2P''(z)+zP'(z)\}\right)\bigg|_{z=1}\\
&=(z^2P'''(z)+3zP''(z)+P'(z))\big|_{z=1}\\
&=P'''(1)+3P''(1)+P'(1)
\end{aligned}
$$

故此等式化成

$$
\begin{aligned}
&Ak^3P(1)+3Ak^2P'(1)+3Ak[P''(1)+P'(1)]\\
&\quad +A[P'''(1)+3P''(1)+P'(1)]\\
&\quad +Bk^2P(1)+2BkP'(1)+B[P''(1)+P'(1)]\\
&\equiv k
\end{aligned}
$$

计及$P(1)=0$，$P'(1)=0$，即为

$$3AkP''(1)+A[P'''(1)+3P''(1)]+BP''(1)\equiv k$$

故 $\quad 3AP''(1)=1 \qquad A[P'''(1)+3P''(1)]+BP''(1)=0$

如果 $P''(1)\neq 0$，则可有

$$A=\frac{1}{3P''(1)}\qquad B=-\frac{P'''(1)+3P''(1)}{3[P''(1)]^2}$$

所求特解为

$$T(Ak^3+Bk^2)$$

$$=T\left\{\frac{k^3}{3P''(1)}-\frac{P'''(1)+3P''(1)}{3[P''(1)]^2}k^2\right\}\qquad(14.22)$$

其中 $P''(1)$如(14.21)，而

$$P'''(1)=n(n-1)(n-2)+a_1(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$+\cdots+a_{n-3}n!$$

例4. $x(kT+nT)+a_1x(kT+nT-T)+\cdots$
$$+a_{n-1}x(kT+T)+a_nx(kT)=kT$$

同例3，但假定辅助方程的 n 个根全相等为 α。

解 辅助方程为 $P(z)\equiv(z-\alpha)^n=0$。就所给方程取 z 变换并假定 $x(0)=x(T)=\cdots=x(nT-T)=0$，则有

$$P(z)X(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

于是

$$X(z)=\frac{Tz}{(z-\alpha)^n(z-1)^2}$$

若 $\alpha\neq1$，则

$$Z^{-1}[X(z)]=\underset{\alpha}{\mathrm{res}}\left[\frac{Tz^k}{(z-\alpha)^n(z-1)^2}\right]$$

$$+\underset{1}{\mathrm{res}}\left[\frac{Tz^k}{(z-\alpha)^n(z-1)^2}\right]$$

$$=\frac{T}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{z^k}{(z-1)^2}\right]_{z=\alpha}$$

$$+T\left[\frac{d}{dz}\frac{z^k}{(z-a)^n}\right]_{z=1}$$

显然末端第一项的结果完全包括在补函数

$$a^k(C_1+C_2k+\cdots+C_nk^{n-1})$$

中，末端第二项等于

$$T\left[\frac{k}{(1-a)^n}-\frac{n}{(1-a)^{n+1}}\right]=T\left\{\frac{k}{P(1)}-\frac{P'(1)}{[P(1)]^2}\right\}$$

即可取为特解，其形式同上例(14.19)。

若 $a=1$，则

$$X(z)=\frac{Tz}{(z-1)^{n+2}}$$

$$Z^{-1}[X(z)]=\operatorname*{res}_{1}\frac{Tz^k}{(z-1)^{n+2}}$$

$$=\frac{T}{(n+1)!}\left[\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}(z^k)\right]_{z=1}$$

$$=\frac{T}{(n+1)!}k(k-1)(k-2)\cdots(k-n)$$

$$(\text{在 } k=0,1,2,\cdots,n,n+1,n+2,\cdots)$$

即为一特解。由于补函数此时为 $C_1+C_2k+\cdots+Ck^{n-1}$，故舍去上式中含在补函数中之项，可取特解

$$\frac{T}{(n+1)!}\{k^{n+1}-(1+2+\cdots+n)k^n\}$$

$$=\frac{T}{(n+1)!}\left\{k^{n+1}-\frac{1}{2}n(n+1)k^n\right\}$$

特别，$n=2$，给出 $T(k^3-3k^2)/6$，同 §13 例 3 各解

末。

例5. $x(kT+nT)+a_1x(kT+nT-T)+\cdots$

$a_nx(kT)=\cos(k\omega T)$

$y(kT+nT)+a_1y(kT+nT-T)+\cdots$

$a_ny(kT)=\sin(k\omega T)$

解 写$w=x+jy$，则

$$w(kT+nT)+a_1w(kT+nT-T)+\cdots$$
$$+a_nw(kT)=e^{jk\omega T}$$

若 $e^{j\omega T}$ 不是辅助方程

$$P(z)\equiv z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

之根，则由(14.12)，可得w—方程的特解

$$\frac{e^{jk\omega T}}{P(e^{j\omega T})}=\frac{e^{jk\omega T}(e^{-jn\omega T}+a_1e^{-j(n-1)\omega T}+\cdots}{P(e^{j\omega T})P(e^{-j\omega T})}$$

$$+\frac{a_{n-1}e^{-j\omega T}+a_n)}{P(e^{j\omega T})P(e^{-j\omega T})}$$

$$=\frac{e^{j(k-n)\omega T}+a_1e^{j(k-n+1)\omega T}+\cdots}{|P(e^{j\omega T})|^2}$$

$$+\frac{a_{n-1}e^{j(k-1)\omega T}+a_ne^{jk\omega T}}{|P(e^{j\omega T})|^2}$$

分开实部及虚部即得x-方程及y-方程的特解：

$$\frac{\cos[(k-n)\omega T]+a_1\cos[(k-n+1)\omega T]+\cdots+a_n\cos(k\omega T)}{|P(e^{j\omega T})|^2}$$

及

$$\frac{\sin[(k-n)\omega T]+a_1\sin[k-n+1)\omega T]+\cdots+a_n\sin(k\omega T)}{|P(e^{j\omega T})|^2}$$

§ 15　向量型一阶差分方程的解

在 §1 中，我们曾将一个 n 阶常系数线性差分方程化为一组 n 个一阶线性差分方程，其型如 §1 的 (1.10)，它是向量型一阶差分方程，类似于 §12 的(12.1)。我们可用类似于解(12.1)的方法解这个向量型一阶差分方程。其实我们能用类似于解(12.1)的方法解较(1.10)更为广泛的向量型一阶线性差分方程：

$$\vec{x}(kT+T)=\vec{A}\vec{x}(kT)+\vec{B}\vec{u}(kT) \tag{15.1}$$

其中

$$\vec{x}(kT)=\begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n(kT) \end{pmatrix} \text{是 } n\times 1 \text{ 状态向量。} \tag{15.2}$$

$$\vec{u}(kT)=\begin{pmatrix} u_1(kT) \\ u_2(kT) \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_p(kT) \end{pmatrix} \text{是 } p\times 1 \text{ 输入向量} \tag{15.3}$$

$$\vec{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{是 } n\times n \text{ 常数矩阵} \tag{15.4}$$

$$\vec{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \text{是 } n\times p \text{ 常数矩阵} \tag{15.5}$$

当然(15.1)等价于一组 n 个一阶常系数线性差分方程。我们用 z 变换来解(15.1)。

按(15.1)各项取 z 变换，并利用 §6 性质（三）的第二条，可有

$$z[\vec{X}(z)-\vec{x}(0)]=\vec{A}\vec{X}(z)+\vec{B}\vec{U}(z) \qquad (15.6)$$

其中

$$\vec{X}(z)=\begin{pmatrix} X_1(z)=Z[x_1(kT)] \\ X_2(z)=Z[x_2(kT)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_p(z)=Z[x_n(kT)] \end{pmatrix}$$ 是 $n\times 1$ 状态变换向量

$$\vec{x}(0)=\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \cdots\cdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$$ 是 $n\times 1$ 初始条件向量

$$\vec{U}(z)=\begin{pmatrix} U_1(z)=Z[u_1(kT)] \\ U_2(z)=Z[u_2(kT)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_p(z)=Z[u_p(kT)] \end{pmatrix}$$ 是 $p\times 1$ 输入变换向量

以 $\vec{I}$ 表单位矩阵，则(15.6)可写成

$$(z\vec{I}-\vec{A})\vec{X}(z)=z\vec{x}(0)+\vec{B}\vec{U}(z)$$

于是

$$\vec{X}(z)=(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}z\vec{x}(0)+(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}\vec{B}\vec{U}(z) \qquad (15.7)$$

逆矩阵 $(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}z=z(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}$ 是 $n\times n$ 方阵，其元素是 z 的有理分式，分子及分母的次数一般均为 n 次，各元素均有反 z 变换，因而矩阵 $(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}z$ 必为某函数矩阵 $\vec{\varphi}(kT)$ 的 z 变换，即有 $n\times n$ 矩阵 $\vec{\varphi}(kT)$ 使

$$(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}z=Z[\vec{\varphi}(kT)] \tag{15.8}$$

于是按 §6 性质（三）的第一式可有

$$z^{-1}(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}z=Z[\vec{\varphi}(kT-T)] \quad 在 k\geqslant 1$$

即 $(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}=Z[\vec{\varphi}(kT-T)]$ 在 $k\geqslant 1$

并且在 $k=0$ 时，我们应把右端 $\vec{\varphi}(-T)$ 换为 0（方阵）

因此

$$\vec{\psi}(kT)=\begin{cases}\vec{\varphi}(kT-T) & 在 k\geqslant 1\\ 0\ (方阵) & 在 k=0\end{cases}$$

则 $(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}=Z[\psi(kT)]$

又 $\vec{B}\vec{U}(z)=\vec{B}Z[\vec{u}(kT)]$

故由卷积定理（§6的(t)），可有

$$\begin{aligned}(z\vec{I}-\vec{A})^{-1}\vec{B}\vec{U}(z)\\
&=Z[(\vec{\psi}*\vec{B}\vec{u}\ (kT)]\\
&=Z[\vec{\psi}(T)\vec{B}\vec{u}(kT-T)+\vec{\psi}(2T)\vec{B}\vec{u}(kT-2T)\\
&\qquad+\cdots+\vec{\psi}(kT)\vec{B}\vec{u}(0)]\\
&=Z[\vec{\varphi}(0)\vec{B}\vec{u}(kT-T)+\vec{\varphi}(T)\vec{B}\vec{u}(kT-2T)\\
&\qquad+\cdots+\vec{\varphi}(kT-T)\vec{B}\vec{u}(0)]\\
&=Z[\sum_{i=0}^{k-1}\vec{\varphi}(iT)\vec{B}\vec{u}(kT-iT-T)]\end{aligned} \tag{15.9}$$

以(15.8)及(15.9)代入(15.7)并取反 z 变换，即得(15.1)的解：

$$\begin{aligned}\vec{x}(kT)&=\vec{\varphi}(kT)\vec{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\vec{\varphi}(iT)\vec{B}\vec{u}(kT-iT-T)\\
&=\vec{\varphi}(kT)\vec{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\vec{\varphi}(kT-iT-T)\vec{B}\vec{u}(iT)\end{aligned} \tag{15.10}$$

其中 $k=0,1,2,3,\cdots$ (15.10)称状态过渡方程。

§ 16　算子法解常系数线性差分方程

类似于用求导算子D解常系数线性微分方程，我们可用平移算子E来解常系数线性差分方程。平移算子E的定义由下式给出：

$$Ex(kT)=x(kT+T) \tag{16.1}$$

据此，可有

$$E^2x(kT)=EEx(kT)=Ex(kT+T)=x(kT+2T)$$

$$E^3x(kT)=EE^2x(kT)=Ex(kT+2T)=x(kT+3T)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}E^nx(kT)&=EE^{n-1}x(kT)=Ex(kT+nT-T)\\&=x(kT+nT)\end{aligned}$$

于是差分方程

$$\begin{aligned}a_0x(kT+nT)&+a_1x(kT+nT-T)+\cdots\\&+a_{n-1}x(kT+T)+a_nx(kT)\\&=f(kT)\end{aligned} \tag{16.2}$$

可写成

$$\begin{aligned}a_0E^nx(kT)+a_1E^{n-1}x(kT)+\cdots+a_{n-1}Ex(kT)\\+a_nx(kT)=f(kT)\end{aligned}$$

更进一步写成

$$(a_0E^n+a_1E^{n-1}+\cdots+a_{n-1}E+a_n)x(kT)=f(kT) \tag{16.3}$$

方程(16.3)左端 $x(kT)$ 的“系数”是算子E的n次降幂多项式，记如 $P(E)$，即

$$P(E)\equiv a_0E^n+a_1E^{n-1}+\cdots+a_{n-1}E+a_n \tag{16.4}$$

$$P(E)x(kT)=(a_0E^n+a_1E^{n-1}+\cdots+a_{n-1}E+a_n)x(kT)$$

从而方程(16.3)(即(16.2))可写成

$$P(E)x(kT)=f(kT) \tag{16.5}$$

这样，采用算子E首先简化了差分方程的写法。

$P(E)$也是一个算子。不同的n，a_0，a_1，…，a_n给出不同的$P(E)$。作为算子，对不同$P(E)$可进行相加，相减，相乘，并满足寻常的运算律：互换律，结合律，分配律，并且E^n满足指数律。例如

$$\begin{aligned}(E-3)(E+2)x(kT)&=(E+2)(E-3)x(kT)\\&=(E^2-E-6)x(kT)\end{aligned}$$

我们讨论E的负幂。首先，我们应有

$$E^{-1}f(kT)=f(kT-T) \tag{16.6}$$

据此，　$E^{-1}Ef(kT)=E^{-1}f(kT+T)=f(kT)$

并且　$EE^{-1}f(kT)=Ef(kT-T)=f(kT)$

因此，　E及E^{-1}互为逆算子，并且根据后一式，我们定义

$$E^{-1}f(kT)=\frac{1}{E}f(kT) \quad 即E^{-1}=\frac{1}{E}$$

继之

$$\left.\begin{aligned}E^{-2}f(kT)&=f(kT-2T)=\frac{1}{E^2}f(kT)\\E^{-3}f(kT)&=f(kT-3T)=\frac{1}{E^3}f(kT)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\E^{-n}f(kT)&=f(kT-nT)=\frac{1}{E^n}f(kT)\end{aligned}\right\} \tag{16.7}$$

这些结果对解差分方程，是很重要的。

现在定义$\frac{1}{P(E)}$。作为定义，$\frac{1}{P(E)}$是一个算子，使

$$P(E)\frac{1}{P(E)}f(kT)=f(kT) \tag{16.8}$$

据此，方程(16.5)的解可写成

$$x(kT)=\frac{1}{P(E)}f(kT) \tag{16.9}$$

理由是：根据(16.8) 将 (16.9)两端均从左方施用 $P(E)$ 即回到(16.5)。因此两方程 (16.5) 及 (16.9) 是等价的，即由(16.5)可写出(16.9)，反之。由(16.9)亦可直接得(16.5)。

对于$\frac{1}{P(E)}$我们可进行部分分式展开。例如，

$$\frac{1}{E^2-(\alpha+\beta)E+\alpha\beta}f(kT)$$

$$=\frac{1}{(E-\alpha)(E-\beta)}f(kT)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{E-\alpha}-\frac{1}{E-\beta}\right)f(kT)$$

而欲证此，只须从左方施用算子 $(E-\alpha)(E-\beta)$ 于各端并根据运算律及(16.8)，可见结果均为$f(kT)$。

我们可用长除法或其他方法将 $1/P(E)$展开为 $1/E$ 的升幂级数。例如，用长除法并根据

$$\frac{被除式}{除式}=商式+\frac{余式}{除式}$$

我们可归纳出如下的等式：

$$\frac{1}{E+a}=\left(\frac{1}{E}-\frac{a}{E^2}+\frac{a^2}{E^3}-\cdots+\frac{(-a)^{k-1}}{E^k}\right)+$$

$$+\frac{1}{E+a}\frac{(-a)^k}{E^k}$$

从而有

$$\frac{1}{E+a}f(kT)=\left\{\left(\frac{1}{E}-\frac{a}{E^2}+\frac{a^2}{E^3}-\cdots+\frac{(-a)^{k-1}}{E^k}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\frac{a}{E}}\frac{(-a)^k}{E^{k+1}}\right\}f(kT) \qquad (16.10)$$

欲证此，只须从左方运用算子 $E+a$ 于等式两端，根据(16.8)及运算律，如果均为 $f(kT)$。再者，应用这结果解差分方程时，繁杂的末项并不重要，重要的是我们能归纳出级数的一般项$\frac{(-a)^{k-1}}{E^k}$，而末项包含更高幂因子$\frac{(-a)^k}{E^{k+1}}$

同样由长除法，我们可归纳出

$$\frac{1}{(E+a)^2}=\left(\frac{1}{E^2}-\frac{2a}{E^3}+\frac{3a^2}{E^4}-\cdots+\frac{k(-a)^{k-1}}{E^{k+1}}\right)$$

$$+\frac{1}{(E+a)^2}\left(\frac{(k+1)(-a)^k}{E^k}-\frac{k(-a)^{k+1}}{E^{k+1}}\right)$$

从而有

$$\frac{1}{(E+a)^2}f(kT)=\left\{\left(\frac{1}{E^2}-\frac{2a}{E^3}+\frac{3a^2}{E^4}-\cdots+\frac{k(-a)^{k-1}}{E^{k+1}}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\left(1+\frac{a}{E}\right)^2}\left(\frac{(k+1)(-a)^k}{E^{k+2}}-\right.$$

$$-\frac{k(-a)^{k+1}}{E^{k+3}}\Big)\Big\}f(kT) \tag{16.11}$$

如果不计末项，由牛顿二项展开式，我们可有

$$\frac{1}{(E+a)^n}=\frac{1}{E^n}\left(1+\frac{a}{E}\right)^{-n}$$

$$=\frac{1}{E^n}\left(1-\frac{na}{E}+\frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{E^2}-\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}\frac{(-a)^r}{E^r}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{E^n}-\frac{na}{E^{n+1}}+\frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{E^{n+2}}-\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}\frac{(-a)^r}{E^{n+r}}+\cdots \tag{16.13}$$

有了算子E的这些性质，我们就能解差分方程。从一阶差分方程开始。

例1. $x(kT+T)+ax(kT)=f(kT)$ (16.14)

求 $x(kT)$。

解 我们所要求的 $x(kT)$ 须满足

$$x(-T)=x(-2T)=x(-3T)=\cdots=0$$

因此，当$k\leqslant-2$时，方程(16.14)的左端为0，故当$k\leqslant-2$时，$f(kT)=0$，即

$$f(-2T)=f(-3T)=f(-4T)=\cdots=0$$

当$k=-1$时，(16.14)成为

$$x(0)+ax(-T)=f(-T)$$

即必有 $f(-T)=x(0)$

采用算子E，(16.14)可写成

$$(E+a)x(kT)=f(kT)$$

其解为

$$x(kT)=\frac{1}{E+a}f(kT)$$

按(16.10)，不计末项，可有

$$x(kT)=\left(\frac{1}{E}-\frac{a}{E^2}+\frac{a^2}{E^3}-\cdots+(-a)^{k-1}\frac{1}{E^k}\right.$$
$$\left.+(-a)^k\frac{1}{E^{k+1}}+(-a)^{k+1}\frac{1}{E^{k+2}}+\cdots\right)f(kT) \qquad (16.15)$$

其实，这展式亦可按二项展式得出：

$$x(kT)=\frac{1}{E}\,\frac{1}{1+\frac{a}{E}}f(kT)$$
$$=\frac{1}{E}\left(1+\frac{a}{E}\right)^{-1}f(kT)$$
$$=\frac{1}{E}\left(1-\frac{a}{E}+\frac{a^2}{E^2}-\cdots\right.$$
$$\left.+(-a)^{k-1}\frac{1}{E^{k-1}}+\cdots\right)f(kT)$$

按(16.7)，则(16.15)可化成

$$x(kT)=f(kT-T)-af(kT-2T)$$
$$+a^2f(kT-3T)+\cdots+(-a)^{k-1}f(0)$$
$$+(-a)^kf(-T)+(-a)^{k+1}f(-2T)+\cdots$$

但已得 $f(-T)=x(0)$，$f(-2T)=f(-3T)=\cdots=0$，故得

解

$$x(kT)=f(kT-T)-af(kT-2T)$$
$$+a^2f(kT-3T)-\cdots$$
$$+(-a)^{k-1}f(0)+(-a)^kx(0)$$

这和§12的(12.6)完全一样。这种演算较简捷，并且一次得出通解。补函数为 $x(0)(-a)^k$ 特解为

$$f(kT-T)-af(kT-2T)+a^2f(kT-3T)$$
$$-\cdots+(-a)^{k-1}f(0)$$

例2. $x(kT+2T)+ax(kT+T)+bx(kT)=f(kT)$

(16.16)

求 $x(kT)$。

解，所要求的 $x(kT)$ 满足

$$x(-T)=x(-2T)=x(-3T)=\cdots=0$$

在(16.16)中，如果 $k\leqslant-3$，则得 $f(kT)=0$，即必有

$$f(-3T)=f(-4T)=f(-5T)=\cdots=0$$

于(16.16)中代入 $k=-2$，可有 $x(0)=f(-2T)$

于(16.16)中代入 $k=-1$，可有 $x(T)+ax(0)=f(-T)$

用算子 E，则(16.16)可写成

$$(E^2+aE+b)x(kT)=f(kT)$$

于是

$$x(kT)=\frac{1}{E^2+aE+b}f(kT) \qquad (16.17)$$

以 α，β 表示右端分母的两零点。则

$$E^2+aE+b=(E-\alpha)(E-\beta)$$

(i) $\alpha\neq\beta$，则(16.17)可写成

$$x(kT)=\frac{1}{(E-\alpha)(E-\beta)}f(kT)=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{E-\alpha}-\frac{1}{E-\beta}\right)f(kT)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\left(\frac{1}{E}+\frac{\alpha}{E^2}+\cdots+\frac{\alpha^{k-1}}{E^k}+\frac{\alpha^k}{E^{k+1}}+\frac{\alpha^{k+1}}{E^{k+2}}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{E}+\frac{\beta}{E^2}+\cdots+\frac{\beta^{k-1}}{E^k}+\frac{\beta^k}{E^{k+1}}+\frac{\beta^{k+1}}{E^{k+2}}+\cdots\right)\right\}f(kT)$$ （参阅 16.10）

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{\alpha-\beta}{E^2}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{E^3}+\cdots+\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{E^k}+\frac{\alpha^k-\beta^k}{E^{k+1}}+\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{E^{k+2}}+\cdots\right\}f(kT)$$

应用(16.7)并考虑已得的

$$f(-3T)=f(-4T)=f(-5T)=\cdots=0$$

可有

$$x(kT)=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha-\beta)f(kT-2T)+(\alpha^2-\beta^2)f(kT-3T)+\cdots+(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})f(0)+(\alpha^k-\beta^k)f(-T)+(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})f(-2T)\}$$

再将(16.17)中已得的结果 $f(-T)=x(T)+\alpha x(0)$，$f(-2T)=x(0)$，代入上式得

$$x(kT)=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha-\beta)f(kT-2T)$$

$$+(\alpha^2-\beta^2)f(kT-3T)+\cdots$$
$$+(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})f(0)$$
$$+(\alpha^k-\beta^k)[x(T)+ax(0)]$$
$$+(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})x(0)\}$$

即所要求的解。特解为

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha-\beta)f(kT-2T)$$
$$+(\alpha^2-\beta^2)f(kT-3T)+\cdots$$
$$+(\alpha^{k-1}-\beta^{k-1})f(0)\} \quad \text{同}(13.5)$$

补函数为

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\{(\alpha^k-\beta^k)[x(T)+ax(0)]$$
$$+(\alpha^{k+1}-\beta^{k+1})x(0)\} \quad \text{同}(11.4)。$$

这里一次得出补函数及特解两部分，而且演算较简。

α 及 β 为共轭复数，结果仍能用。

(ii) $\beta=\alpha$，差分方程为

$$(E-\alpha)^2x(kT)=f(kT)$$

解为

$$x(kT)=\frac{1}{(E-\alpha)^2}f(kT)$$
$$=\frac{1}{E^2}\left(1-\frac{\alpha}{E}\right)^{-2}f(kT)$$
$$=\frac{1}{E^2}\left\{1+\frac{2\alpha}{E}+\frac{3\alpha^2}{E^2}+\cdots\right.$$
$$+\frac{(k-1)\alpha^{k-2}}{E^{k-2}}+\frac{k\alpha^{k-1}}{E^{k-1}}+\frac{(k+1)\alpha^k}{E^k}$$
$$\left.+\cdots\right\}f(kT)$$

$$=\left\{\frac{1}{E^2}+\frac{2a}{E^3}+\frac{3a^2}{E^4}+\cdots+\frac{(k-1)a^{k-2}}{E^k}\right.$$

$$\left.+\frac{ka^{k-1}}{E^{k+1}}+\frac{(k+1)a^k}{E^{k+2}}+\cdots\right\}f(kT)$$

（比较(16.11)）

依(16.7)并注意已得的

$$f(-3T)=f(-4T)=f(-5T)=\cdots=0$$

可有

$$\begin{aligned}x(kT)&=f(kT-2T)+2af(kT-3T)\\&\quad+3a^2f(kT-4T)+\cdots+(k-1)a^{k-2}f(0)\\&\quad+ka^{k-1}f(-T)+(k+1)a^kf(-2T)\end{aligned}$$

又已得 $f(-T)=x(T)+ax(0)$， $f(-2T)=x(0)$，代入之，最后得

$$\begin{aligned}x(kT)&=f(kT-2T)+2af(kT-3T)+\cdots\\&\quad+(k-1)a^{k-2}f(0)+ka^{k-1}[x(T)+ax(0)]\\&\quad+(k+1)a^kx(0)\end{aligned}$$

即为所要求的解。特解为

$$f(kT-2T)+2af(kT-3T)+\cdots+(k-1)a^{k-2}f(0)$$

同(13.8)

补函数为

$$ka^{k-1}[x(T)+ax(0)]+(k+1)a^kx(0) \qquad 同(11.8)$$

这里，一次得出特解及补函数两部分并且演算较简。

例3. $x(kT+nT)+a_1x(kT+nT-T)+\cdots$

$$+a_{n-1}x(kT+T)+a_nx(kT)=f(kT) \tag{16.18}$$

并且辅助方程的 n 个根 α_1，α_2，…，α_n 彼此不等。

解，由于

$$x(-T)=x(-2T)=x(-3T)=\cdots=0$$

故在 $k\leqslant -n-1$ 即 $k+n\leqslant -1$ 时必有 $f(kT)=0$ 即

$$f(-nT-T)=f(-nT-2T)=f(-nT-3T)=\cdots=0 \tag{16.19}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{于(16.18)中令}k=-n \quad \text{则} x(0)=f(-nT)\\
&\text{令} k=-n+1 \quad \text{则} \quad x(T)+a_1x(0)=f(-nT+T)\\
&\text{令} k=-n+2 \text{则} \quad x(2T)+a_1x(T)+a_2x(0)=f(-nT+2T)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\text{令} k=-2 \text{则}\\
&x(nT-2T)+a_1x(nT-3T)+\cdots+a_{n-2}x(0)=f(-2T)\\
&\text{令} k=-1 \quad \text{则}\\
&x(nT-T)+a_1x(nT-2T)+\cdots+a_{n-1}x(0)=f(-T)
\end{aligned}\right\} \tag{16.20}$$

采用算子 E，并写

$$P(E)=E^n+a_1E^{n-1}+a_2E^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E+a_n$$
$$=(E-\alpha_1)(E-\alpha_2)\cdots(E-\alpha_n)$$

其中 α_1，α_2，…，α_n 彼此不等，则方程(16.18)可写成

$$P(E)x(kT)=f(kT)$$

其解为

$$x(kT)=\frac{1}{P(E)}f(kT)$$

$$=\frac{1}{(E-a_1)(E-a_2)\cdots(E-a_n)}f(kT)$$

展开为部分分式之和，可有

$$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{E-a_i}f(kT) \qquad (16.21)$$

其中
$$K_1=\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}$$

$$K_2=\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n=\frac{1}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}$$

令

$$\frac{K_1}{E-a_1}f(kT)=K_1\left(\frac{1}{E}+\frac{a_1}{E^2}+\cdots+\frac{a_1^{k-1}}{E^k}+\frac{a_1^k}{E^{k+1}}\right.$$
$$+\frac{a_1^{k+1}}{E^{k+2}}+\cdots+\frac{a_1^{k+n-1}}{E^{k+n}}$$
$$\left.+\frac{a_1^{k+n}}{E^{k+n+1}}+\cdots\right)f(kT)$$

按(16.7)并利用(16.19)则上式化成

$$\frac{K_1}{E-a_1}f(kT)$$
$$=K_1\{f(kT-T)+a_1f(kT-2T)+\cdots+a_1^{k-1}f(0)$$
$$+a_1^kf(-T)+a_1^{k+1}f(-2T)+\cdots$$
$$+a_1^{k+n-1}f(-nT)\}$$

再以(16.20)代入，可有

$$\frac{K_1}{E-a_1}f(kT)$$

$$=K_1\{f(kT-T)+a_1f(kT-2T)+\cdots+a_1^{k-1}f(0)$$
$$+a_1^k[x(nT-T)+a_1x(nT-2T)+\cdots$$
$$+a_{n-1}x(0)]+a_1^{k+1}[x(nT-2T)$$
$$+a_1x(nT-3T)+\cdots+a_{n-2}x(0)]$$
$$+\cdots$$
$$+a_1^{k+n-1}x(0)\}$$

以及其他 $n-1$ 个类似的结果。代入(16.21)得

$$x(kT)=\sum_{i=1}^{n}K_i\{f(kT-T)+a_if(kT-2T)+\cdots$$
$$+a_i^{k-1}f(0)\}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}K_i\{[x(nT-T)+a_1x(nT-2T)+\cdots$$
$$+a_{n-1}x(0)]+a_i[x(nT-2T)+a_1x(nT-3T)$$
$$+\cdots+a_{n-2}x(0)]+\cdots+a_i^{n-1}x(0)\}$$

即为所求之解。右端前一和给出特解如(14.6)，后一和给出补函数如 $\sum_{i=1}^{n}C_ia_i^k$，其中 C_i 与 k 无关

例4. $$x(kT+nT)+a_1x(kT+nT-T)+\cdots$$
$$+a_{n-1}x(kT+T)+a_nx(kT)$$
$$=f(kT) \qquad (16.18)$$

并且辅助方程的 n 个根全相等为 a。

解 关系式(16.19)及(16.20)仍成立。采用算子 E，所给方程能写成

$$(E^n+a_1E^{n-1}+a_2E^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E+a_n)x(kT)=(kT)$$

即 $$(E-a)^n x(kT)=f(kT)$$

于是

$$x(kT)=\frac{1}{(E-a)^n}f(kT)$$

$$=\frac{1}{E^n}\left(1-\frac{a}{E}\right)^{-n}f(kT)$$

从而

$$x(kT)=\frac{1}{E^n}\left(1+n\frac{a}{E}+\frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{E^2}\right.$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\frac{a^3}{E^3}+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\frac{a^i}{E^i}$$

$$\left.+\frac{n(n+1)\cdots(n+i)}{(i+1)!}\frac{a^{i+1}}{E^{i+1}}+\cdots\right)f(kT)$$

$$=\left(\frac{1}{E^n}+n\frac{a}{E^{n+1}}+\frac{n(n+1)}{2!}\frac{a^2}{E^{n+2}}+\cdots\right.$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}\frac{a^i}{E^{n+i}}$$

$$\left.+\frac{n(n+1)\cdots(n+i)}{(i+1)!}\frac{a^{i+1}}{E^{n+i+1}}+\cdots\right)f(kT)$$

按(16.7)，此可化成

$$x(kT)=f(kT-nT)+naf(kT-nT-T)$$

$$+\frac{1}{2!}n(n+1)a^2f(kT-nT-2T)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(n+i-1)}{i!}a^{i}f(kT-nT-iT)$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(n+i)}{(i+1)!}a^{i+1}f(kT-nT-iT-T)$$

$$+\cdots$$

再按(16.19)可得

$$\begin{aligned}x(kT)=&\Big\{f(kT-nT)+naf(kT-nT-T)\\&+\frac{n(n+1)}{2!}a^{2}f(kT-nT-2T)+\cdots\\&+\frac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}a^{k-n}f(0)\Big\}\\&+\Big\{\frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!}a^{k-n+1}f(-T)\\&+\frac{n(n+1)\cdots k(k+1)}{(k-n+2)!}a^{k-n+2}f(-2T)+\cdots\\&+\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}a^{k}f(-nT)\Big\}\end{aligned} \tag{16.22}$$

即为所求的解。(16.22) 右端共有 $k+1$ 项，分两部分，前后两付花括号，各表示为 $\psi(kT)$ 及 $A(kT)$，在后一付花括号 $A(kT)$ 中，$f(-T)$，$f(-2T)$，…，$f(-nT)$ 由(16.20)给出。现在我们按不同的 k 来考察(16.22)右端的 $k+1$ 项：

$k=0$，右端只有1项 $f(-nT)=x(0)$，此应为

$A(kT)|_{k=0}$，因此$\psi(kT)|_{k=0}=0$

$k=1$，(16.22)右端有2项：

$$f(-nT+T)+naf(-nT)$$

这两项之和为$A(kT)|_{k=1}$，因此，$\psi(kT)|_{k=1}=0$

$k=2$，(16.22)右端有3项：

$$f(-nT+2T)+naf(-nT+T)+\frac{n(n+1)}{2!}a^2f(-nT)$$

这三项之和为$A(kT)|_{k=2}$，因此$\psi(kT)|_{k=2}=0$

………………………………………

$k=n-1$，(16.22)右端有n项：

$$f(-T)+naf(-2T)+\frac{n(n+1)}{2!}a^2f(-3T)+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}a^{n-1}f(-nT)$$

这n项之和为$A(kT)|_{k=n-1}$，因此$\psi(kT)|_{k=n-1}=0$

$k=n$，(16.22)右端有$n+1$项：

$$f(0)+\left\{naf(-T)+\frac{n(n+1)}{2!}a^2f(-2T)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)\cdots(2n-1)}{n!}a^nf(-nT)\right\}$$

其中等一项$f(0)$为$\psi(kT)|_{k=n}$，花括号中的n项为$A(kT)|_{k=n}$

$k=n+1$，(16.22)的右端有$n+2$项：

$$f(T)+na\,f(0)+\left\{\frac{n(n+1)}{2!}a^2f(-T)\right.$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^3f(-2T)+\cdots$$

$$\left.+\frac{n(n+1)\cdots(2n)}{(n+1)!}a^{n+1}f(-nT)\right\}$$

前两项$f(T)+na\,f(0)$为$\psi(kT)|_{k=n+1}$，花括号中的n项为$A(kT)|_{k=n+1}$

……………………………………

归纳起来，可有

$$\psi(kT)=\begin{cases}0 & \text{在}k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\\ f(kT-nT)+na\,f(kT-nT-T) & \\ +\dfrac{n(n+1)}{2!}a^2f(kT-nT-2T)+\cdots & \\ +\dfrac{n(n+1)\cdots(k-1)}{(k-n)!}a^{k-n}f(0) & \text{在}k\geqslant n\end{cases}$$

（共$k-n+1$项）

$$A(kT)=\frac{n(n+1)\cdots(k-1)k}{(k-n+1)!}a^{k-n+1}f(-T)$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots k(k+1)}{(k-n+2)!}a^{k-n+2}f(-2T)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}a^k f(-nT)$$

（共 n 项）

$\psi(kT)$为特解，同(14.7)。

$A(kT)$为补函数。由(14.7)前的ⓒ，我们有

$$\frac{n(n+1)\cdots k}{(k-n+1)!}=\frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}$$

$$\frac{n(n+1)\cdots k(k+1)}{(k-n+2)!}=\frac{(k+1)k\cdots(k-n+3)}{(n-1)!}$$

……………………………………………

右端分子为k的$n-1$次多项式，故 $A(kT)$ 可化为

$$a^k(C_1+C_2k+\cdots+C_nk^{n-1})$$

其中C_1、C_2，…，C_n与k无关，结果同§11。

参 考 书

［1］ 王泽汉 数学分析基础 黑龙江科技出版社 1984.

［2］ 李友善 自动控制原理 上册、下册 国防工业出版社 1980 1981

［3］ Bejiamin C.Kuo Automotic control systems fourth edition.1982.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝Ｚ变换与差分方程
作者＝王泽汉
页数＝１７５
ＳＳ号＝１１１３８９３８
出版日期＝１９８５年０１月第１版
出版社＝哈尔滨工业大学出版社
尺寸＝１９ｃｍ
原书定价＝１．４０
主题词＝Ｚ变换　差分方程
参考文献格式＝王泽汉，友文庭编．Ｚ变换与差分方程．哈尔滨市：哈尔滨工业大学出版社，１９８５．

封面
书名
版权
前言
目录
目录